

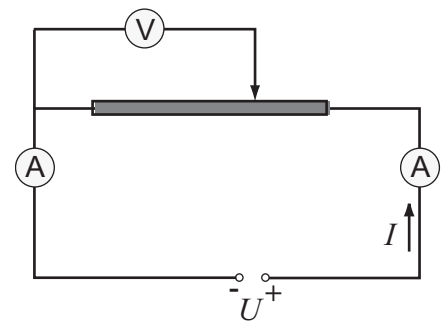
Förord

Många av övningsuppgifterna illustrerar eller ger nya aspekter på de teorier vi diskuterar snarare än att träna på användning av formler, även om det finns några sådana uppgifter också. De flesta av uppgifterna är diskussionsuppgifter, även om man tar fram ett numeriskt svar. Utnyttja lärarna på kursen och varandra.

I många uppgifter är det inte det exakta kvantitativa svaret som är viktigast, utan att du försöker passa in problemställningen och lösningen i vår teoribild. Fundera över hur uppgifterna passar in i kursen, vilka begrepp som ingick i en viss uppgift och om du har förstått något nytt genom att lösa en uppgift. Varför gjorde man som man gjorde i uppgiften, vilka begrepp illustreras i uppgiften? Titta igenom dina lösningar igen efter ett tag - kanske förstår du dem på ett nytt sätt.

1. Figur 1 visar en krets med en voltmeter, två amperemetrar och en järnstav som får fungera som resistor.

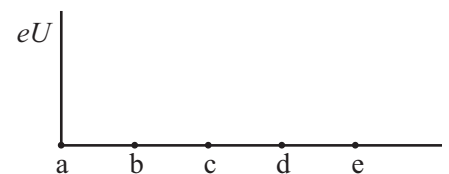
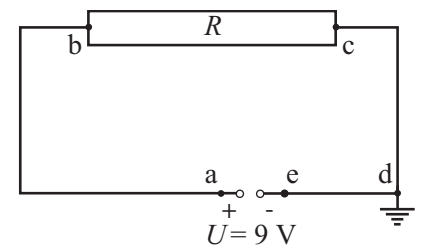
- Skissa strömmen I som funktion av U .
- Vad visar amperemetrarna som funktion av U ?
- Vad visar voltmeteren som funktion av U ?



Figur 1

2. Figur 2 visar en krets med en halvledarstav och ett batteri (9V). Staven är 10 mm lång, har tvärsnittsarea 10^{-6} m^2 och materialet har resistiviteten $0,01 \Omega\text{m}$.

- Hur stora är spänningsfallen mellan a och b , mellan a och c samt mellan a och e ?
- Hur varierar den potentiella energin eU för en negativ testladdning (med samma laddning som en elektron) om man tänker sig att den vandrar medurs i kretsen från a till e ? Rita!
- Hur varierar testladdningens potentiella energi om man vänder på batteriet?
- Hur varierar det elektriska fältet när vi går ett varv runt kretsen (medurs) från a till e (med batteriet inkopplat enligt figuren)?



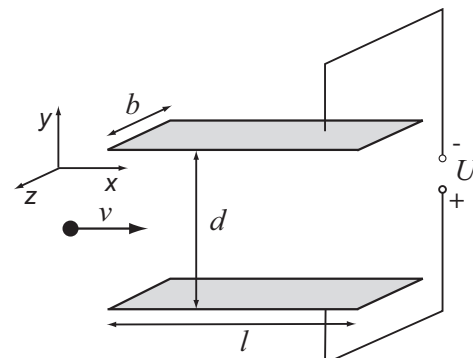
Figur 2

3. En koppartråd är 20 cm lång och har en tvärsnittsarea på 1 mm^2 . Vid en ström-spänningsmätning uppmäter man en spänning på 1,7 mV och en ström på 0,5 A. Vi antar att varje kopparatom bidrar med en elektron till elektrongasen.

- Bestäm det elektriska fältet $\mathcal{E}$ längs med tråden.
- Hur stor är elektronkoncentrationen n ?
- Bestäm strömtätheten J .
- Hur stor är elektronernas drifhastighet v_d ?
- Bestäm konduktiviteten σ i koppar.
- Bestäm elektronernas kollisionstid τ .
- Hur stor är elektronernas termiska hastighet v_{th} vid $T = 300\text{K}$?

4. Genom att låta elektroner passera korsade elektriska och magnetiska fält kunde JJ Thomson bestämma deras hastighet. Metoden kan även användas för att *välja ut* de partiklar i en stråle som har önskad hastighet.

Vi låter en stråle av protoner passera mellan två plattor som i figur 3. Avståndet mellan plattorna $d = 2$ cm, plattornas bredd $b = 3$ cm och längden $l = 5$ cm. Ett elektriskt fält $\mathcal{E}$ uppstår när vi lägger en spänning $U = 3000$ V mellan plattorna med polaritet enl. figur.



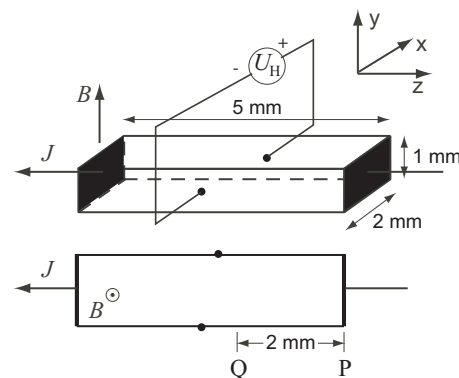
Figur 3

- (a) Ange fältets storlek och markera dess riktning i figuren. I vilken riktning verkar den resulterande kraften på protonerna?

Ett magnetfält B , vinkelrätt mot $\mathcal{E}$ och mot protonernas hastighet v , kan genereras i området mellan plattorna med hjälp av spolar. Protonernas hastighet varierar och vi vill preparera en stråle där alla protoner har samma hastighet, $v = 5 \cdot 10^5$ m/s, dvs endast protoner med denna hastighet ska kunna passera plattorna utan att avlänkas.

- (b) I vilken riktning måste magnetfältet peka?
 (c) Hur stor behöver den magnetiska flödestätheten B vara?
 (d) Vad händer med protoner som har dubbelt så stor hastighet?

5. Ett germaniumprov har kontakter som täcker de två 2×1 mm² stora ändytorna. Dessutom finns två punktkontakter ungefär mitt på de 5×1 mm² stora sidoytorna. Ett magnetfält kan läggas över provet enligt figur 4. En spänning på 310 mV mellan ändkontakterna leder till en ström på 5 mA.



Figur 4

- (a) Vad visar en voltmeter som kopplas mellan Q och P?

Utan magnetfält mäter man en spänning 3,2 mV mellan punktkontakterna. I ett magnetfält på 0,16 T blir spänningen mellan punktkontakterna 8,0 mV.

- (b) Varför uppstår en spänning mellan punktkontakterna utan att ett magnetfält har lagts på?
 (c) Vad blir Hallspänningen när magnetfältet lagts på?
 (d) Beräkna laddningsbärarkoncentrationen i germaniumprovet från data ovan.
 (e) Uppskatta konduktiviteten hos germaniumprovet.
 (f) Hur stor är laddningsbärarnas mobilitet?
 (g) Är laddningsbärarna i provet positivt eller negativt laddade?

6. Bestäm energinivåerna hos en tre-dimensionell oändlig låpotential, en kub med kantlängden L . Indikera i en skiss noderna för de fyra lägsta tillståndens vågfunktioner.
7. Betrakta bildandet av metallkluster inom följande grova modell:
- 8 fria atomer, med var sin elektron, beskrivs av 8 enskilda kubiska, oändliga potentialgropar med kantlängd a .
 - De 8 kubiska lådorna förs samman till en enda kubisk oändlig potentialgrop med kantlängd $2a$.
- Bestäm den totala elektroniska energin för de två fallen.
 - Bildar de 8 atomerna ett (stabilt) kluster?
8. Elektronkoncentrationen i en metall är $n = 4,9 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$. Uppskatta (inom fri-elektronmodellen) medelavståndet (i energi) mellan två närliggande besatta elektroniska tillstånd för tre kubiska prov med volymerna i) 1 nm^3 , ii) $1 \mu\text{m}^3$ och iii) 1 mm^3 .
Jämför energiskillnaden med kT vid rumstemperatur. När kan vi säkert strunta i energikvantiseringen relativt kT ?
9. Fermi-Dirac fördelningen (som gäller för fermioner) ger sannolikheten för att en energinivå med en viss energi är besatt.
- Bestäm sannolikheten att ett tillstånd med energi kT över Fermi-nivån är besatt vid rumstemperatur.
 - Vad är motsvarande sannolikhet då energin istället är kT under Fermi-nivån?
 - Vilken energi har det tillstånd som är obesatt med 1% sannolikhet vid 77 K?
10. Betrakta en fri elektrongas i tre dimensioner med Fermienergi E_F vid $T = 0 \text{ K}$.
- Gör en skiss av Fermifördelningen.
 - Hur kan du med hjälp av tillståndstätheten $Z(E)$ och Fermifördelningen $F(E)$ ge ett uttryck för antalet elektroner i gasen?
 - Använd samma begrepp ($Z(E)$ och $F(E)$) för att ge ett uttryck för elektronernas totala energi.
 - Vad är medelenergin per elektron vid $T = 0 \text{ K}$?
 - Har elektronerna någon potentiell energi?

11. Vad innebar periodiska randvillkor? För planvågor e^{ikx} , ta fram det villkor k måste uppfylla för att planvågorna ska uppfylla periodiska randvillkor.
12. Med halvledarteknik kan man skapa två-dimensionella elektrongaser där elektroner rör sig fritt i två dimensioner istället för i tre som vi hittills har diskuterat. Vågvektorn för en elektron i en sådan gas har två komponenter; $\mathbf{k}_{2D} = (k_x, k_y)$.
- Tänk dig en sådan två-dimensionell elektrongas (2DEG) kan modelleras som en oändligt djup två-dimensionell, kvadratisk potentialbrunn med sidan L . Vad blir de tillåtna energierna i brunnen som funktion av kvanttalen n_x och n_y ?
 - Om vi istället antar periodiska randvillkor, vad blir då de tillåtna energierna uttryckt i vågtalen k_x och k_y ?
 - Bestäm ett uttryck för tillståndstätheten *per ytenhet* för en två-dimensionell gas.
 - Bestäm ett uttryck för Fermienergin för en sådan två-dimensionell metall (elektrongas). Låt n vara antalet elektroner per ytenhet.
13. Ett användbart resultat från statistisk fysik är *Boltzmannfaktorn* som är proportionell mot sannolikheten att ett system har en viss energi givet en viss temperatur.
- Betrakta figuren på sidan 98 i kompendiet. Beräkna i) kvoten mellan sannolikheten att systemet har energi Δ och sannolikheten att systemet har grundtillståndsenergin; dvs $P(\Delta)/P(0)$ och ii) kvoten $P(2\Delta)/P(0)$. Antag att $\Delta = kT$.
 - Skriv ner ett uttryck för sannolikheten att det tionde en-elektron-tillståndet (med energi 9Δ) är besatt. Om vi sedan tänker oss att vi utgår från en låg temperatur T , ökar eller minskar sannolikheten att det tionde en-elektrontillståndet är besatt då kT närmar sig Δ ?

14. Betrakta en enkel energinivåstruktur som består av en energinivå med energi 0 (vi sätter nollnivån för energi här) och en energinivå med energi Δ , där den senare är dubbelt degenererad. Systemet innehåller en partikel.
- (a) Ställ upp ett uttryck för systemets medelenergi.
 - (b) Vad blir medelenergin i gränfallen $kT \gg \Delta$ och $kT \ll \Delta$?
Tänk efter först och räkna sen!
 - (c) *För den intresserade:* Hur mycket energi kan detta lilla två-nivå-system ta upp? Vad händer när man höjer temperaturen? Ta fram ett uttryck för systemets värmekapacitet, och ta reda på vad värmekapaciteten blir i gränsfallet $kT \gg \Delta$. Tänk efter först och räkna sen, eller plotta om räkningen blir jobbig.
15. Litiums elektriska ledningsförmåga (konduktivitet) är $\sigma = 1,05 \cdot 10^7 (\Omega\text{m})^{-1}$.
- (a) Vad är Fermihastigheten för ledningselektroner i litium?
 - (b) Vad är elektronernas termiska hastighet vid rumstemperatur?
 - (c) Bestäm drifhastigheten hos elektronerna i metallen vid ett pålagt elektriskt fält $\mathcal{E} = 100 \text{ V/m}$.
 - (d) Hur lång är elektronernas fria medelväglängd ℓ ?
 - (e) Uppskatta hur många litiumatomer en elektron passerar utan att spridas.
16. Uppskatta andelen elektroner som har energier inom ett intervall kT strax under Fermi-energin. Uppskatta sedan elektronernas bidrag till värmekapaciteten genom att anta att endast dessa elektroner är termiskt exciterade vid temperaturen T och då har ett termiskt energitillskott på i medel kT .
- 17.
- (a) Beräkna Fermienergin för ledningselektroner i koppar. Antag att varje kopparatom bidrar med en ledningselektron.
 - (b) Uppskatta bidraget från atomgittret till värmekapaciteten hos koppar vid rumstemperatur.
 - (c) Uppskatta ledningselektronernas bidrag om de betraktas som en klassisk gas.
 - (d) Vi vet att elektroner inte beter sig som klassiska partiklar - bl a lyder de under Pauli-principen. Vad blir isåfall deras bidrag till värmekapaciteten?
 - (e) Hur stort är elektronernas procentuella bidrag till värmekapaciteten och varför blir det så stor skillnad på svaren i (c) och (d)?

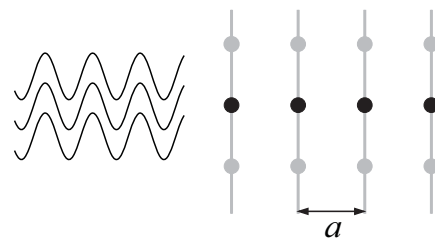
18. I vår sol ($M_{sol} = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg, $R_{sol} = 6,96 \cdot 10^5$ km) frigörs energi genom en fusionsprocess där 4 väteatomer omvandlas till en heliumatom. Om 5 miljarder år förväntas solens väte vara förbrukat och solen förvandlas (efter ett mellanstadium som "röd jätte") till en "vit dvärg" ($M = 0,5M_{sol}$, $R = 10^4$ km).

Temperaturen i en vit dvärg uppskattas till omkring 10^7 K. He-atomerna är då fullständigt joniserade och elektronerna kan approximativt betraktas som en fri-elektron gas.

Beräkna Fermienergin och Fermitemperaturen för elektronerna i en vit dvärg. Kan dessa elektroner betraktas som en klassisk gas?

19. (a) Härled Bragg-villkoret för konstruktiv interferens i de interferensmönster som uppstår när en våg träffar en kristall.
(b) Vad händer när strålen infaller normalt mot atomplanen?
20. I neutronspektroskopi låter man neutronstrålen som kommer från reaktorn reflekteras av en germaniumkristall för att få en monoenergetisk neutronstråle. Atomplanen som är parallella med kristallens yta har inbördes avstånd $d = 0,327$ nm. Hur skall man välja vinkeln mellan strålen och atomplanen så att de reflekterade neutronerna har energin 0,03 eV?

21. Elektroner kan beskrivas som sannolikhetsvågor som, precis som andra vågor, kan interferera. Vågbeskrivningen av elektronen är det synsätt som gör att vi överhuvudtaget kan göra en modell för uppkomsten av band och bandgap. Vi betraktar här det enklaste fallet: en våg som propagerar vinkelrätt mot atomplan.



- (a) För vilka våglängder förväntar du dig att det uppstår konstruktiv interferens mellan vågor reflekterade i olika plan?
(b) Vad är vågtalen k vid konstruktiv interferens?

22. En fri elektron rör sig i en endimensionell metall med längden L och beskrivs av vågfunktionen

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx}$$

- (a) Ange sannolikhetstätheten.
- (b) Ange elektronens kinetiska energi.
- (c) Ange rörelsemängden.

Kristallen innehåller ett mycket stort antal atomer på avståndet a ifrån varandra. För att förstå lite mer om kristallers elektronstruktur behöver vi ta hänsyn till den periodiska potential som atomerna ger upphov till. En mycket enkel sådan potential kan skrivas som

$$V(x) = -V_0 \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \quad V_0 > 0$$

- (d) Skissa potentialen relativt atomernas lägen.

De approximativa stationära tillstånd som uppstår när $\phi(x)$ med $k = \pi/a$ modifieras av den periodiska potentialen ges av

$$\phi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2L}} (e^{ikx} \pm e^{-ikx}) \quad (k = \pi/a)$$

- (e) Skissa sannolikhetstätheten för både ϕ_+ och ϕ_- relativt atomernas läge.
- (f) Hur stor är elektronens rörelsemängd i de två tillstånden?
- (g) Hur stor är elektronens kinetiska energi i de två tillstånden?
- (h) Hur stor är elektronens potentiella energi i de två tillstånden?
- (i) Hur stort är bandgapet?

Om vi tar med en term till från Fourierserien på s. 127 kan potentialen skrivas

$$V(x) = -V_0 \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) - V_1 \cos\left(\frac{4\pi}{a}x\right)$$

- (j) *för den intresserade* Påverkar den andra termen vår beräkning i deluppgift (h)? Vilka vågtal har de sannolikhetsvågor som påverkas av den andra termen?

23. Det är mycket få kvantmekaniska problem vi kan lösa exakt. Ofta startar man från ett näraliggande, lösbart problem och försöker sedan tackla det svårare problemet genom att undersöka hur energier och vågfunktioner approximativt ändrar sig när vi närmar oss det fulla problemet (så kallad störningsräkning)

I halvledar-heterostrukturer kan vi skapa kvantbrunnar som kan fånga in elektroner. Vad händer med energierna och vågfunktionerna då man lägger ett elektriskt fält över strukturen? Vi förenklar problemet genom att betrakta kvantbrunnen som oändligt djup, utgår från egenfunktionerna till ett sådant system och tar sedan hänsyn till det elektriska fältet med hjälp av störningsräkning.

En oändlig en-dimensionell brunn med bredden L beskrivs av Hamiltonoperatoren

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

där $V(x) = 0$ för $0 \leq x \leq L$ och ∞ för övrigt.

- (a) Bestäm energiegenvärdena, E_n^0 , och tillhörande vågfunktioner, ϕ_n^0 . (eller plocka ditt svar från uppg. 6)
- (b) Visa att vågfunktionerna är ortogonala.
- (c) Skissa vågfunktionerna och sannolikhetstätheterna för de tre lägsta tillstånden.

Ett konstant elektriskt fält, $\mathcal{E}$, läggs på symmetriskt kring $L/2$. Eftersom $\mathcal{E} = -\frac{dU}{dx}$, kan den elektriska potentialen $U(x)$ skrivas $U(x) = -\mathcal{E}(x - L/2)$ och elektronens potentiella energi blir då $V_{el}(x) = e\mathcal{E}(x - L/2)$. Hamiltonoperatoren för systemet kan nu skrivas

$$H = H_0 + H'$$

där $H' = V_{el}(x)$.

- (d) Skissa hur potentialbrunnen ser ut med pålagt fält och hur du förväntar att sannolikhetstätheten för det lägsta tillståndet nu ser ut.

Nu försöker vi hitta de nya "eller störda" energierna med hjälp av störningsräkning (första ordningen) - titta i "Kvantvärldens fenomen - teori och begrepp" av Gunnar Ohlén om du inte minns hur man gjorde.

- (e) Vad blir de nya energierna?

Första ordningens störningsräkning gav ingen ledtråd till de nya energierna, så vi får gå vidare och prova med *utveckling i ändliga under- rum*, där man beräknar energin för de nya tillstånden med hjälp av "nya" eller "störda" vågfunktioner. De "nya" vågfunktionerna är svåra att beräkna exakt, så vi försöker beskriva dem som linjärkombinationer av de "gamla".

- (f) Utifrån din skiss i uppgift (d), vilken eller vilka av följande konstruktioner av de ostörda vågfunktionerna ϕ_n^0

$$i) \phi_1^0 + \phi_2^0 \quad ii) \phi_1^0 + \phi_3^0 \quad iii) \phi_2^0 + \phi_3^0$$

tror du bäst motsvarar den ”nya” vågfunktionen för den lägsta energinivån?

Vi väljer den första konstruktionen och antar alltså att grundtillståndet kan beskrivas relativt väl av en superposition av de två lägsta tillstånden.

$$\phi_1 = c_1 \phi_1^0 + c_2 \phi_2^0 \quad (1)$$

Hamiltonianen för det störda problemet är nu

$$(H_0 + H')\phi_n = E_n \phi_n \quad (2)$$

- (g) Sätt in uttryck (1) i uttryck (2), multiplicera från vänster med ϕ_1^0 (egentligen med komplexkonjugatet av ϕ_1^0 , men den är reell) och integrera ekvationens båda led över kvantbrunnens bredd. Detta ger oss en av de två ekvationer vi behöver för att bestämma c_1 och c_2 . Gör sedan om proceduren med den skillnaden att du istället multiplicerar från vänster med ϕ_2^0 så att du får ytterligare en ekvation som beskriver förhållandet mellan c_1 och c_2 .

Ekvationerna kan tillsammans uttryckas i matrisform som

$$\begin{bmatrix} E_1^0 & C \\ C & E_2^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

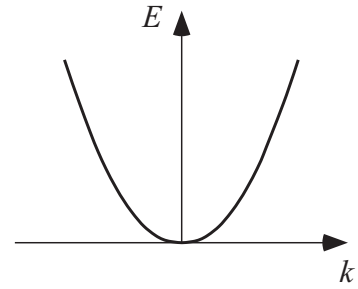
där

$$C = \int_0^L \phi_1^0(x) V_{el}(x) \phi_2^0(x) dx$$

- (h) Bestäm de ”nya” energinivåerna uttryckt i C , E_1^0 och E_2^0 . (Vi kan beräkna C , men det tillför inte så mycket. C bör vara proportionell mot det pålagda fältet och försvinna om fältstyrkan går mot noll.)
- (i) Antag att det elektriska fältet är svagt (annars är det inte säkert att vår störningsräkning med utveckling i endast två termer stämmer alls). Hur förhåller sig lägsta nivån med pålagt fält till motsvarande ostörda nivå?

Skiftet för energinivåerna som sker när ett elektriskt fält läggs över en kvantbrunn kallas Quantum-confined Stark effect. Effekten leder till en minskning av absorptionsenergin i heterostrukturer. Detta kan t.ex. användas för att modulera intensiteten hos en laser. Då man inte har något elektriskt fält kan fotonerna från lasern passera heterostrukturer, men vid en viss fältstyrka absorberas de.

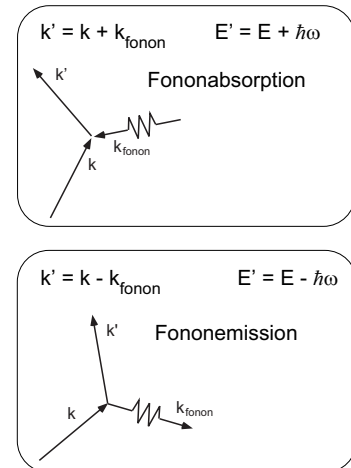
24. (a) Bestäm våglängden hos ledningselektronerna i koppar vid Fermi-energin.
- (b) Avståndet mellan atomplanen (med störst inbördes avstånd) i koppar är $a = 0,209$ nm. I en enkel skiss (se figur 5) av bandstrukturen för ledningselektronerna i koppar (metaller beskrivs ofta bra av fri-elektronmodellen), markera k_F och de vågtal där Bragg-reflektion kan ske. Koppar är förstås en tre-dimensionell struktur men vi ritar en en-dimensionell modell i vår skiss.
- (c) För att ett material ska vara en isolator eller en halvledare måste ferminivån ligga i bandgapet. Baserat på din skiss i (b), är koppar en metall eller inte?
25. I en hypotetisk en-dimensionell kristall sitter identiska atomer på avstånd $a = 0,25$ nm ifrån varandra. Varje atom har z valenselektroner. Låt elektronernas vågfunktioner uppfylla periodiska randvillkor.
- (a) Bestäm Fermienergin för fallen $z = 3$ och $z = 4$ inom fri-elektronmodellen.
- (b) Om vi tar hänsyn till kristallens periodiska potential, vid vilka energier förväntar du dig att elektronernas energier kan avvika från energierna man får från frielektronmodellen, dvs att bandgap skulle kunna uppstå?
- (c) I vilket fall ($z = 3$ eller 4) räknar du med att kristallen är en isolator? Hur många band är då fyllda?
- (d) Vad innebär dina resultat om du jämför med de elektriska egenskaperna hos aluminium och kisel?



Figur 5

26. När ledningselektronerna i en metall accelereras av ett elektriskt fält bromsas de samtidigt av spridningsprocesser och ett stationärt tillstånd uppnås - som Ohms lag påstår. Spridning mot atomära vibrationer är vid rumstemperatur den effekt som huvudsakligen bestämmer metallens resistivitet. Atomära vibrationer i kristaller kan beskrivas som transversella eller longitudinella elastiska vågor. Longitudinella vågor med låg frekvens (och lång våglängd) beskriver vanliga ljudvågor. Dessa vågor är - i analogi med elektromagnetiska vågor - kvantiserade, deras energikvanta kallas **fononer**.

Vi kan beskriva elektronernas spridningsprocess (när de krockar med vibrerande atomer så att elektronens energi och/eller vågvektor ändras) som emission eller absorption av en fonon. I processen är energin bevarad, $E' = E \pm \hbar\omega$, där $E(E')$ är elektronens energi före (efter) kollisionen och $\hbar\omega$ är fononens energi. Även den så kallade kristallimpulsen $\hbar k$ är bevarad; $\hbar k' = \hbar k \pm \hbar k_{\text{fonon}}$, där $k(k')$ är elektronens vågvektor före(efter) kollisionen och k_{fonon} är fononens vågvektor.

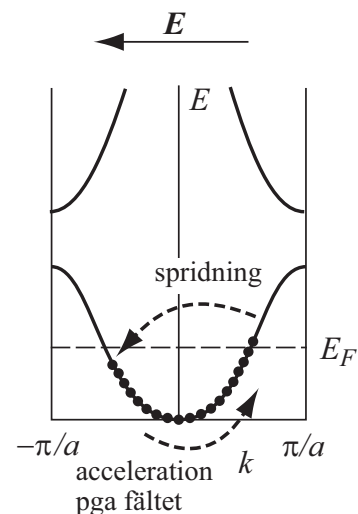


Elektronerna i koppar accelereras av ett pålagt elektriskt fält E . Figur 6 visar en en-dimensionell bild, där inte hela den tre-dimensionella "Fermisfären" är utritad. I ett stationärt tillstånd balanseras accelerationen från fältet av spridningsprocesser och "Fermisfärens" förskjutning är mycket liten i förhållande till dess radie. Förskjutningen av besatta tillstånd relativt k_F är alltså kraftigt överdriven i figuren. En elektron i koppar sprids enligt figuren genom att emittera en fonon.

- (a) Uppskatta vågtalet hos den emitterade fononen.

Antag sedan att sambandet mellan frekvens och vågtal, *dispersionsrelationen*, har samma form för fononer som för fotoner, dvs $f = v/\lambda$, där v är vågens utbredningshastighet (ljudhastigheten i materialet om det gäller en longitudinell fonon). Ljudhastigheten i koppar är $v = 3560\text{m/s}$.

- (b) Uppskatta energin som elektronen förlorar när den sprids.
- (c) Bestäm kvoten mellan elektronens energiförlust och Fermienergin.



Figur 6

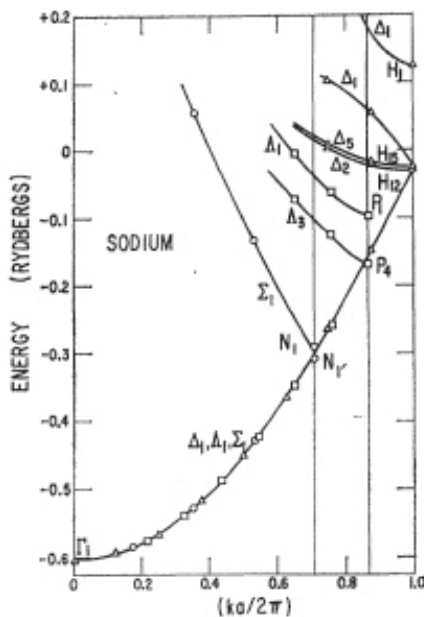


Table IV. Fermi energy and thermal effective mass of the alkali metals for equilibrium lattice constant at 0 K. E_{FS} and $(m_\ell/m_0)_s$ denote the values obtained in the spherical approximation with the parameters of Tables II and VII of I, and E_F and (m_ℓ/m_0) the values for the distorted surface, obtained by interpolation from Table III. $E(N)$ is the energy of the lower state at N . (Energies in rydbergs, lattice constant in angstroms and in atomic units.)

	Li	Na	K	Rb	Cs
$a_0(\text{\AA})$	3.491	4.225	5.225	5.585	6.045
$a_0(\text{a.u.})$	6.597	7.984	9.847	10.555	11.424
E_{FS}	-0.420	-0.367	-0.318	-0.302	-0.284
E_F	-0.431	-0.367	-0.320	-0.308	-0.297
$E(N)$	-0.412	-0.302	-0.293	-0.295	-0.296
$(m_\ell/m_0)_s$	1.32	1.00	1.02	0.99	1.06
(m_ℓ/m_0)	1.66	1.00	1.09	1.21	1.76

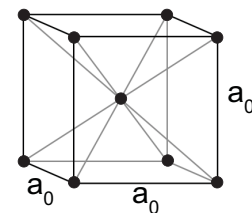
27. Tabellen anger data för alkalimetallerna och i figuren ovan visas en beräknad bandstruktur för valenselektronerna i natrium. Natrium har som man kan se i figuren mycket fri-elektron-lik band, dvs elektronerna i natrium påverkas bara svagt av kristallens periodiska potential och energierna kan antas ligga nära fri-elektronenergierna.

Då natrium belyses med fotoner som är energirika nog för att elektroner ska kunna exciteras från ledningsbandet till nästa högre liggande band ökar den optiska absorptionen markant.

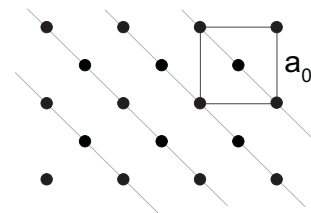
- (a) Uppskatta med hjälp av bilden och tabellen den minsta fotonenergi för vilken denna excitation kan ske. Börja t.ex. med att fundera ut vilka tillstånd i bandstrukturen som är besatta, d.v.s., var ligger Fermienergin?

Den beräknade tre-dimensionella bandstrukturen ovan är komplicerad jämfört med de bandstrukturer för hypotetiska en-dimensionella kristaller som vi oftast nöjer oss med. I tre dimensioner kan elektroner Braggreflekteras i atomplan i flera riktningar och avstånden mellan planen är oftast olika i olika riktningar. Natrium har kristallstrukturen bcc (body centered cubic), vilket innebär att atomer sitter i hörnen och i mitten av en tänkt kub. Hela kristallen kan ses som uppbyggd av sådana kuber staplade på varandra. I undre delen av figur ?? till höger visas natrium sett "ovanifrån".

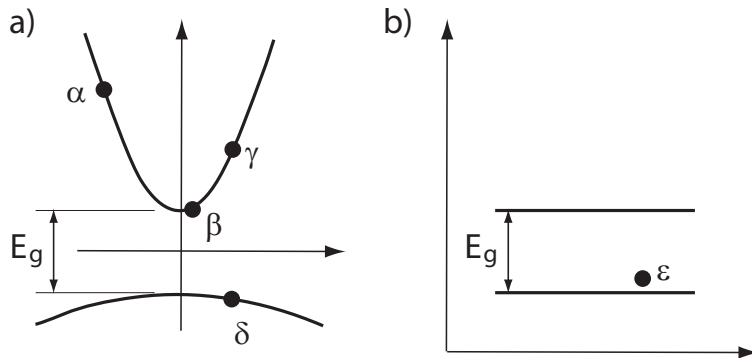
Energierna i figuren och tabellen är i enheter av Rydberg - 1 Rydberg är, som man kanske skulle kunna gissa, 13,6 eV.



- (b) Uppskatta fotonenergin igen, men nu helt teoretiskt genom att beräkna den inom frielektronmodellen. Vi antar alltså att den periodiska potentialen i natrium korregerar energierna ytterst lite, och att frielektronenergierna är en bra uppskattning av energierna i banden. Antag att Braggreflektion sker i de "diagonala" atomplan, med avstånd $a_0/\sqrt{2}$, som är markerade i figuren.



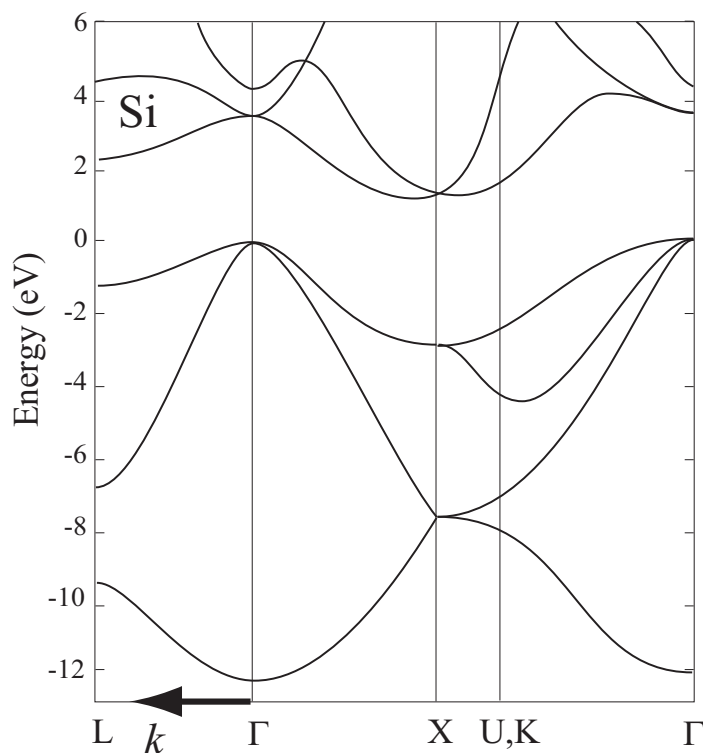
28. (a) Sätt ut korrekta storheter på axlarna i figurerna nedan.
- (b) I figur (a) är fyra elektroniska tillstånd ($\alpha - \delta$) markerade. Märk ut dessa tillstånd också i figur (b). I figur (b) är ett tillstånd (ε) markerat - märk ut detta tillstånd också i figur (a).



29. En halvledare med bandgap E_g bestrålas med fotoner med energin $\hbar\omega$. En foton med $\hbar\omega > E_g$ kan excitera en elektron från valensbandet till ledningsbandet, dvs skapa ett elektron-hålpär.
- (a) Skissa kvalitativt lednings- och valensband och markera elektron-tillstånden före och efter absorption av en foton.
- (b) Bestäm uttryck för vågvektorn k för elektronen och hålet samt för deras respektive kinetiska energi ε_e och ε_h uttryckt i E_g , $\hbar\omega$ samt m_e^* och m_h^* .
- (c) Ett prov av InSb bestrålas med fotoner med energin $\hbar\omega = 0,50$ eV. InSb har $E_g = 0,23$ eV samt effektiva massor $m_e^* = 0,014m_0$ och $m_h^* = 0,40m_0$. Vad blir vågvektorn och energierna för de skapade laddningsbärarna?

30. Figuren nedan visar en beräknad bandstruktur för valenselektronerna i kisel. Γ symboliserar $(k_x, k_y, k_z) = 0$ (dvs mitten av Brillouin-zonen).

- Hitta och markera bandgapet.
- Vilken typ av bandgap har kisel? Är kisel ett lämpligt material för t.ex. halvledarlasrar eller lysdioder?
- Beräkna Fermienergin för valenselektronerna i kisel inom fri-elektronmodellen.
- Kan du på något sätt relatera ditt värde på E_F till den beräknade bandstrukturen?



31. Vanligtvis, dvs vid operationell temperatur, är i princip alla dopatomer med stor sannolikhet joniserade medan excitationen över bandgapet fortfarande är mycket låg. Detta är önskvärt eftersom man då vet att laddningsbärarkoncentrationen bestäms av hur hårt man har dopat.

- (a) Ett kiselprov dopas med aluminium för att erhålla p-typ kisel med resistiviteten $10 \Omega\text{m}$. Hur stor måste koncentrationen aluminiumatomer vara om hålens mobilitet i kisel är $0,05 \text{ m}^2/\text{Vs}$?

I halvledare förekommer både hål och elektroner. Ofta skiljer det flera storleksordningar mellan minoritets- och majoritetsladdningsbärarkoncentrationen (och då försummar man minoritetsladdningsbärarnas bidrag till ledningsförmågan), men i princip bidrar båda typerna av laddningsbärare.

- (b) Uttryck den totala konduktiviteten i ett halvledarprov som innehåller både elektroner och hål i termer av elektronkoncentration n , hålkoncentration p och mobiliteterna μ_e och μ_h .
- (c) Antag att förhållandet mellan elektronernas mobilitet, μ_e , och hålens mobilitet, μ_h , är $\mu_e/\mu_h = 10$ i en viss halvledare, och att hålkoncentrationen är $p = 10^{20} \text{ m}^{-3}$ och elektronkoncentrationen $n = 10^{19} \text{ m}^{-3}$. Den uppmätta konduktiviteten är $0,455 (\Omega\text{m})^{-1}$. Bestäm laddningsbärarnas mobiliteter.
- (d) Beräkna den intrinsiska laddningsbärarkoncentrationen. Uppskatta sedan om bandgapet för halvledaren i deluppgift c är större än eller mindre än bandgapet för Si.

32. Beräkna den effektiva Bohrradien i GaAs. Vid vilken dopkoncentration börjar donatortillstånden (som har en utsträckning som i medel kan approximeras med Bohrradien) att överlappa?

33. För ett n-typ Si-prov har man genom en Hallmätning uppmätt elektronkoncentrationen $n = 10^{19} \text{ m}^{-3}$.

- (a) Hur långt ifrån ledningsbandskanten ligger Ferminivån?
- (b) Om man dopar provet hårdare så att n istället blir $n = 10^{20} \text{ m}^{-3}$ vid samma temperatur, hur långt ifrån ledningsbandskanten ligger Ferminivån då?
- (c) Jämför i en skiss Fermi-Dirac fördelningarna i (a) och (b).

34. För ett n-typ Si-prov har man vid $T = 300 \text{ K}$ uppmätt resistiviteten $\rho = 9 \cdot 10^{-3} \Omega\text{m}$ och den så kallade Hallkonstanten $R_H = 1/qn = -1/ne = -3,9 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{As}$.

- (a) Bestäm elektronernas mobilitet.
- (b) Var ligger Fermi-nivån?
- (c) Bestäm sannolikheten att ett tillstånd i botten av ledningsbandet är besatt.
- (d) Vad säger resultatet i (c) om betydelsen av Pauli-principen för elektronerna i ledningsbandet?

35. En halvledare med bandgap $2,2 \text{ eV}$ är n-dopad med $N_D = 10^{23} \text{ m}^{-3}$.

- (a) Vad är n givet att hälften av donatorerna är joniserade.
- (b) Var ligger Fermi-nivån då?
- (c) Uppskatta temperaturen vid vilken hälften av donatorerna är joniserade för donatorer med bindningsenergi i) $E_C - E_D = 0,05 \text{ eV}$ och ii) $E_C - E_D = 0,20 \text{ eV}$. I denna initiala uppskattning kan du nöja dig med att behålla det starkaste temperaturberoendet och sätta temperaturen i N_C till t.ex. 300 K .
- (d) Gör en noggrannare uppskattning av temperaturen genom att göra en numerisk lösning (ex. grafisk eller genom att iterera) där du tar med alla temperaturberoenden vi har i våra uttryck.

36. Antag att Fermi-nivån $E_F = 0$ är temperaturoberoende och ligger mitt i bandgapet hos en intrinsisk halvledare. Halvledaren har bandgapet E_g och effektiva massan m_e^* . Om $E_g \gg kT$ blir den totala energin (per volymsenhet) för elektronerna i ledningsbandet

$$E_{tot} = 2 \left(\frac{m_e^* kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \times (E_g/2 + \alpha) e^{-E_g/2kT} = n \times (E_g/2 + \alpha)$$

där n är elektronkoncentrationen och där man har satt nollnivå för energi vid bandgapets mitt.

- (a) Ange betydelsen av α .
- (b) Antag att vi sätter noll-nivån för energi vid valensbandskanten istället så att $E_V = 0$. Hur ser nu uttrycket ovan ut?

37. Ett Si-prov dopades med arsenik med avsikt att generera en resistivitet på $0,05 \Omega\text{m}$. På grund av att provet också innehöll oönskade orenheter som fungerade som acceptorer blev den slutliga resistiviteten istället $0,06 \Omega\text{m}$, dock var provet fortfarande n-typ.

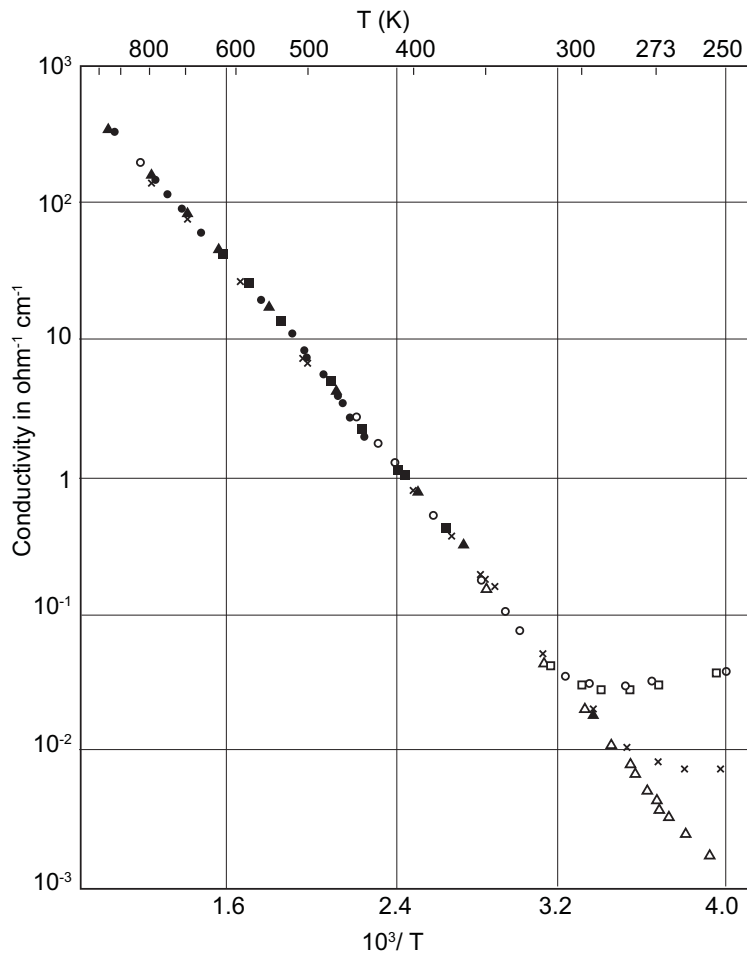
- (a) Rita ett schematiskt banddiagram och indikera vilka tillstånd som är tomma vid $T = 0 \text{ K}$.

Antag sedan att $\mu_e = 0,15 \text{ m}^2/\text{Vs}$ och att alla dopatomer är joniserade.

- (b) Hur stora är donator- och acceptorkoncentrationerna i provet?

38. Figuren nedan visar data för germaniumprov dopade på olika sätt.

- (a) Bestäm bandgapet för germanium.
 (b) Några prover verkar skilja ut sig från de andra (och från varandra). På vilket sätt är de annorlunda?
 (c) Uppskatta dopkoncentrationen i det prov som i figuren anges med ofyllda kvadrater.



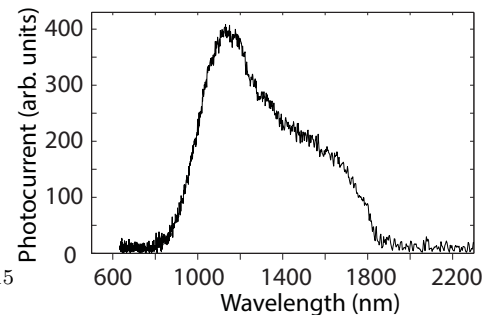
39. (a) Skissa, för ett kiselprov dopat med fosfor i en koncentration $N_D = 10^{23} \text{ m}^{-3}$, hur elektronkoncentrationen och konduktiviteten beror av temperaturen. Skissa i samma diagram även hållkoncentrationen.
- (b) Markera i ditt diagram det område i vilket vi vill att halvledarkomponenter ska arbeta.
- (c) Uppskatta områdets gränstemperaturer.

40. Ett kiselprov har volymen 1 mm^3 och är dopat med acceptorer i en koncentration $N_A = 10^{22} \text{ m}^{-3}$. För att ledningshålen i provet ska kunna beskrivas som en klassisk gas måste Pauli-principens betydelse vara försumbar, dvs sannolikheten att ett tillstånd i valensbandet är besatt av ett hål måste vara mycket liten.

- (a) Hur många tillstånd finns det inom ett energiintervall $3kT$ nedanför valensbandsbandkanten vid rumstemperatur i provet?
- (b) Hur många hål finns i valensbandet?
- (c) Kan hålen i valensbandet betraktas som en klassisk gas?
- (d) Hur stor är hållens fria medelväglängd?

41. Nanotrådar av halvledarmaterial förväntas bli viktiga strukturer i kommande elektroniska och optoelektroniska komponenter. Man har mycket god kontroll över den kemiska sammansättningen i nanotrådarna - t.ex. kan man kombinera de två halvledarmaterialen InAs och InP till $\text{InAs}_x\text{P}_{1-x}$. Bandgapet i det färdiga materialet beror på x .

Figur 7 visar fotoströmmen, som uppstår då elektron-hål-par skapas av absorberade fotoner, genom en nanotråd med kompositionen $\text{InAs}_{0.85}\text{P}_{0.15}$ som funktion av fotonernas våglängd. Vad är bandgapet?



Figur 7

42. Strömmen genom en pn-övergång är 10 nA vid en backspänning på 10V ($T = 300 \text{ K}$). Vad blir strömmen genom dioden vid en framspänning på
- (a) 0,1 V?
- (b) 0,3 V?
- (c) 0,5 V?
43. För en p^+n diod i kisel är den normala arbetsströmmen ca 1 mA per $100 \mu\text{m}^2$ vid framspänning 0,7V. Antag att dioden går sönder vid 100 mA per $100 \mu\text{m}^2$ - hur stor var ändringen i pålagd spänning?

44. I en bra diod ska den mättade backströmmen i pn-övergången vara så liten som möjligt. Bandgapet i kisel är 1,1 eV och 0,66 eV i germanium. Vilket material är i så fall mest lämpat för att tillverka dioder?
45. (a) I vilken del av en pn - övergång i termisk jämvikt är den elektriska fältstyrkan större än noll?
(b) I vilken riktning pekar det elektriska fältet här?
46. Energiskillnaden mellan Ferminivåerna i n- resp. p-typ halvledarna innan de "sammansätts" till en pn-övergång är $e\psi_0$, där ψ_0 är den inbyggda spänningen (även kallad diffusionsspänningen). Visa att för ψ_0 gäller

$$\psi_0 = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_{n0}p_{p0}}{n_i^2} = \frac{kT}{e} \ln \frac{N_D N_A}{n_i^2}$$

där vi antagit fullständig jonisation av störställena.

47. En pn-övergång i kisel ska användas som fotodiod. Antag att $N_A = 10^{22} \text{ m}^{-3}$, $N_D = 10^{21} \text{ m}^{-3}$ och $n_i = 1,0 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-3}$
- (a) Beräkna rymdladdningsområdets utsträckning på n- respektive p-sidan (dvs x_n och x_p).
- Ljuskänsligheten kan ökas genom att man lägger på en yttre spänning så att rymdladdningsområdet blir större.
- (b) Ska dioden vara fram- eller backspänd?
(c) Hur stor spänning krävs för att göra rymdladdningsområdet dubbelt så stort?

48. En pn-övergång i kisel är dopad med $N_A = 10^{22} \text{ m}^{-3}$ och $N_D = 10^{21} \text{ m}^{-3}$. Vi antar temperaturen 300 K och sätter $n_i = 1,0 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-3}$.
- (a) Beräkna rymdladdningsområdets utsträckning på n-sidan (dvs x_n).
- (b) Beräkna hur mycket potentialen ψ har minskat från värdet i det neutrala området vid $x = 0,8x_n$ (dvs 20% in i utarmningsområdet från $x = x_n$).
- (c) Använd ditt resultat i b-uppgiften för att beräkna n och p vid $x = 0,8x_n$.
- (d) Beräkna den totala rymdladdningstätheten – generellt uttryckt $\rho(x) = e(N_D(x) - N_A(x) + p(x) - n(x))$ – vid $x = 0,8x_n$. Vilken av termerna dominerar ρ vid den aktuella koordinaten?

49. En pn-övergång i germanium är dopad så att $N_A = 10^{23} \text{ m}^{-3}$, $N_D = 10^{22} \text{ m}^{-3}$ (dvs det är en p⁺n-diod).

- (a) Skissa i) laddningstätheten ii) elektriska fältet.
- (b) Hur ändras dina skisser då man backspänner dioden?
- (c) Hur ändras skisserna då man framspänner dioden?
- (d) Beräkna ψ_0 och $\mathcal{E}_m$ i övergången (utan pålagd spänning).

När en pn-övergång backspänns så mycket att den maximala fältstyrkan överskrider genombrottsspänningen $\mathcal{E}_{br}$ får vi genombrott i dioden.

- (e) Beräkna genombrottsspänningen i en pn-övergång i germanium med dopning enligt ovan där $\mathcal{E}_{br} = 2 \cdot 10^7 \text{ V/m}$.

50. En pn-övergång i germanium är dopad så att $N_A = 3,7 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3}$ och $N_D = 1,7 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3}$. $n_i = 2,4 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$ vid aktuell temperatur.

- (a) Beräkna elektronkoncentrationen på n- respektive p-sidan i övergången.
- (b) Beräkna hållkoncentrationerna på n- respektive p-sidan i övergången.
- (c) Om pn-övergången framspänns med 0,1 V, hur stora blir då koncentrationerna av minoritetsladdningsbärare vid utarmningsområdet?
- (d) Vid framspänning, hur stora är minoritetsladdningsbärarkoncentrationerna långt in på p- respektive n-sidan? Hur blir det om man byter till backspänning?

51. En pn-övergångsLED av GaAsP emitterar rött ljus ($\lambda = 670 \text{ nm}$). Vid en framspänning på 1,3 V är strömmen 0,015 mA. Ökas framspänningen till 1,6 V så ökar strömmen till 17 mA. När pn-övergången är backspänd har den en kapacitans på 86,3 pF vid 1 V och 41,8 pF vid 10 V. Lavingenombrott sker vid 20 V.

För GaAsP gäller att $\epsilon_r = 12$ och $\mathcal{E}_{br} = 8 \cdot 10^7 \text{ V/m}$

- (a) Bestäm temperaturen i komponenten (genom att utnyttja diodekvationen).
- (b) Bestäm I_0 .
- (c) Bestäm laddningsbärarkoncentrationen på p-sidan om övergången är hårt dopad på n-sidan.
- (d) Bestäm övergångens inbyggda spänning ψ_0 .
- (e) Bestäm övergångens area.

52. Betrakta en ideal MOS-struktur, där utträdesarbetet i halvledaren är lika stort som det i metallen. Halvledaren är n-dopad.

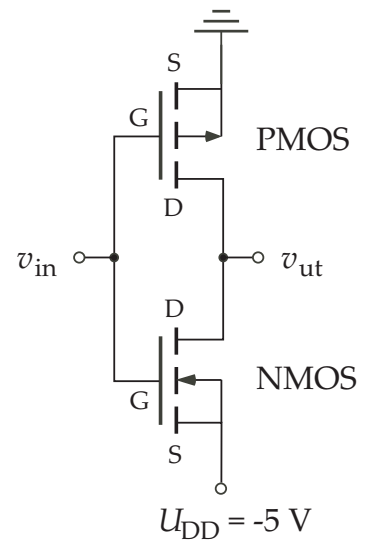
- Hur ser banddiagrammet ut vid ackumulation?
- Vilken polaritet måste den pålagda spänningen ha för att åstadkomma ackumulation?

53. Över en MOS-struktur av n-typ kisel ($N_D = 10^{22} \text{ m}^{-3}$) har man lagt en spänning sådan att potentialen ψ_{yt} på ytan av halvledaren, närmast oxiden, är $\psi_{yt} = -0,3 \text{ V}$.

- Rita en någorlunda skalenlig skiss av bandstrukturen i halvledaren. Med skalenlig avses att bandböjningen är rimlig relativt bandgapets storlek. Märk ut E_F och E_{Fi} .
- Beräkna bredden hos utarmningsområdet i halvledaren samt elektriska fältstyrkan vid halvledarens yta.
- Hur stor är laddningen/ytenhet (dvs enhet C/m^2) på metallens yta för denna spänning? Ange även laddningens tecken.

54. I kretsen till höger, som är en CMOS-inverterare, finns en PMOS och en NMOS som har tröskelspänning -2 V respektive $+2 \text{ V}$. Vilka värden måste insignalen v_{in} anta för att kretsen ska fungera som en inverterare? Välj bland förslagen nedan.

- -5 V och $+5 \text{ V}$.
- -5 V och 0 V .
- 0 V och $+5 \text{ V}$.

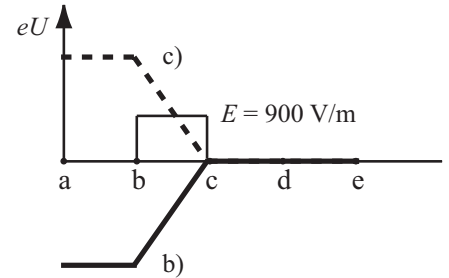


Svar

- I beror linjärt på U , med riktningskoefficient $1/R$.
 - Båda ampèremetrarna visar samma värde (strömmen enligt a)).
 - Voltmetern visar ungefär $2/3$ av U , eftersom den mäter spänningsfallet över ungefär $2/3$ av järnstaven.

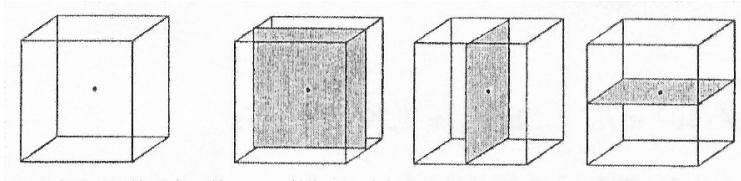
- $a - b: 0\text{V}, a - c: 9\text{V}, a - e: 9\text{V}$

De breda linjerna visar den potentiella energin som efterfrågas i b) och c), medan den tunna visar det elektriska fältet som efterfrågas i d). Observera att "grundnivå" för energin egentligen är helt godtycklig. Ofta tillämpar man dock konventionen att jordning, som i punkten d), innebär nollnivå för elektrisk potential (vilket också innebär nollnivå för potentiell energi).



- $\mathcal{E} = 8,5 \cdot 10^{-3} \text{ V/m}$
 - $n = 8,45 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$
 - $J = 5,0 \cdot 10^5 \text{ A/m}^2$
 - $v_d = (-)3,69 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$
 - $\sigma = 5,9 \cdot 10^7 (\Omega\text{m})^{-1}$
 - $\tau = 24,7 \text{ fs}$
 - $v_{th} = 1,17 \cdot 10^5 \text{ m/s}$
- E-fältet pekar i positiv y -riktning, och därmed även kraften på protonerna. $\mathcal{E} = 150 \text{ kV/m}$.
 - Magnetfältet pekar i positiv z -riktning.
 - $0,3 \text{ T}$
 - De avlänkas neråt i figuren.
- 124 mV
 - Kontakterna sitter inte mittemot varandra, de är förskjutna. Det är svårt att placera dem perfekt mittemot varandra.
 - $U_H = 4,8 \text{ mV}$
 - $n = 1,04 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3}$ (Det fungerar inte att ta fram laddningsbärartätheten från formelsamlingen)
 - $\sigma = 40,3 (\Omega\text{m})^{-1}$
 - $\mu = 0,24 \text{ m}^2/\text{Vs}$
 - positiva laddningsbärare (vi vet ännu inte riktigt vad det kan vara, men vi återkommer till det)

6. Se kompendiet för energinivåerna. Grundtillståndet har ingen nod. De tre följande tillstånd är degenererade och har var sitt nodplan genom kubens mitt.



7. (a) $E = 24 \frac{h^2}{8ma^2}$ (fall i) och $E = 10,5 \frac{h^2}{8ma^2}$ (fall ii),
 (b) Ja
8. i) $\Delta E \sim 0,1 \text{ eV}$, ii) $\Delta E \sim 10^{-10} \text{ eV}$, iii) $\Delta E \sim 10^{-19} \text{ eV}$
9. (a) $F(E_F + kT) = 0,27$
 (b) $F(E_F - kT) = 0,73$
 (c) $E = E_F - 0,030 \text{ eV}$
10. (a) se kompendiet
 (b) $N = \int_0^\infty Z(E)F(E)dE = \int_0^{E_F} Z(E)dE$ vid $T = 0$ där N är totala antal elektroner och $Z(E)$ är totala tillståndstätheten (inte per ytenhet).
 (c) $E_{tot} = \int_0^\infty EF(E)Z(E)dE = \int_0^{E_F} EZ(E)dE$ vid $T = 0$
 (d) $E = 3E_F/5$
 (e) Det är en fri elektrongas, dvs det finns ingen varierande potential och därmed ingen kraft på elektronen - den har bara kinetisk energi (vi bortser från krafter mellan två eller flera elektroner).
11. se kompendiet
12. (a) $E_{n_x, n_y} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} (n_x^2 + n_y^2)$, där n_x och n_y kan anta positiva heltalsvärden (större än noll). Som vi ska se senare är massan m antagligen inte frielektron-massan, utan den effektiva massan i det materialet elektrongasen finns i (t.ex. GaAs).
 (b) $E_{k_x, k_y} = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2)$, där k_x och k_y kan anta värden $0, \pm \frac{2\pi}{L}, \pm \frac{2 \cdot 2\pi}{L}$, osv.
 (c) $Z_{2D}(E) = \frac{m}{\pi \hbar^2}$ (tillståndstäthet per yt- eller areaenhet)
 (d) $E_F = \frac{n \pi \hbar^2}{m}$

13. (a)

$$P(\Delta)/P(0) = \frac{e^{-\Delta/kT}}{e^{-0/kT}} = e^{-\Delta/kT} = e^{-1}$$

$$P(2\Delta)/P(0) = \frac{2e^{-2\Delta/kT}}{e^{-0/kT}} = 2e^{-2\Delta/kT} = 2e^{-2}$$

(b)

$$P(10) = \frac{e^{-2\Delta/kT} + e^{-3\Delta/kT} + 2e^{-4\Delta/kT} + 2e^{-5\Delta/kT} + 4e^{-6\Delta/kT}}{1 + e^{-\Delta/kT} + 2e^{-2\Delta/kT} + 3e^{-3\Delta/kT} + 5e^{-4\Delta/kT} + 7e^{-5\Delta/kT} + 11e^{-6\Delta/kT}}$$

Sannolikheten för att det 10:e tillståndet är besatt ökar om temperaturen ökar mellan 0 och Δ/k .

14. (a)

$$E_{medel} = \frac{2 \cdot \Delta e^{-\Delta/kT}}{1 + 2e^{-\Delta/kT}} = \frac{\Delta}{\frac{1}{2}e^{\Delta/kT} + 1}$$

Samma tankegång som du (förhoppningsvis) använde här för att uttrycka medelenergin ligger bakom härledningen av den termiska medelenergin (kT per oscillator för varje rumsdimension) för en stor mängd harmoniska oscillatorer i kapitel 1 i kompendiet.

(b) $kT \gg \Delta$ ger $E = 2\Delta/3$ (dvs medelvärdet av de tre tillståndens energier) och $kT \ll \Delta$ ger $E = 0$ (dvs partiklen finns i tillståndet med lägst energi om temperaturen är låg).

(c)

$$C_V = \frac{dE_{medel}}{dT} = \frac{\Delta^2 e^{\Delta/kT}}{2kT^2} \left(\frac{1}{2} e^{\Delta/kT} + 1 \right)^{-2}$$

. C_V går mot noll då $kT \gg \Delta$ (det gör den även då kT går mot noll). När alla energinivåer är besatta med samma sannolikhet kan systemets energi inte öka mer även om temperaturen höjs, och värmekapaciteten, som beskriver hur systemets energi ändras då temperaturen ändras, går då mot noll.

15. (a) $v_F = 1,29 \cdot 10^6$ m/s

(b) $v_{th} = 1,17 \cdot 10^5$ m/s

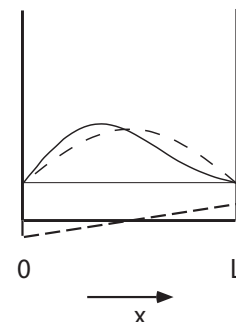
(c) $v_d = 0,14$ m/s

(d) $\ell = v_F \cdot \tau = 10,2$ nm

(e) ungefär 30-35 litiumatomer (fås om man jämför ℓ med avståndet mellan litium-atomerna). Tydligt störs elektronerna inte så mycket av jonerna i litiummetallen utan susar ofta förbi ganska många innan de upplever en störning av något slag.

16. Andelen elektroner är ungefär kT/E_F . Om man antar att andelen elektroner som kan öka sin energi ökar den med kT i genomsnitt blir elektron-gasens energi $E(T) = E(0) + N \cdot kT/E_F \cdot kT$. Bidraget till värme-kapaciteten C_V blir då ungefär $2k^2T/E_F \cdot N$ (där N är antalet eller koncentrationen elektroner).
17. (a) $E_F = 7,03 \text{ eV}$
 (b) $C_V^{atom} = 3N_{atom}k = 3,50 \cdot 10^6 \text{ J/(m}^3\text{K)} = 393 \text{ J/(kg K)}$, där N_{atom} är atomkoncentrationen.
 (c) $C_V^{el} = 1,75 \cdot 10^6 \text{ J/(m}^3\text{K)} = 196 \text{ J/(kg K)}$
 (d) $C_V^{el} = 2,07 \cdot 10^4 \text{ J/(m}^3\text{K)} = 2,32 \text{ J/(kg K)}$
 (e) 0,6%. En klassisk gas-modell (c) överskattar elektronernas för-måga att bidra till värmekapaciteten.
18. $E_F = 10^{-14} \text{ J}$ och därmed blir $T_F = E_F/k = 7,3 \cdot 10^8 \text{ K}$. Nej, antag-ligen är klassisk gas inte någon bra approximation.
19. Se kompendiet.
20. $\lambda \approx 14,6^\circ$
21. (a) $\lambda = 2a/n$, där $n = 1, 2, \dots$ ger konstruktiv interferens
 (b) $k = \frac{\pi}{a} \cdot n$ ger konstruktiv interferens
22. (a) $|\phi(x)|^2 = 1/L$
 (b) $E_{kin} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$
 (c) $p = \hbar k$
 (d) Se figur 5.4 i kompendiet
 (e) Se figur 5.4 i kompendiet
 (f) $\langle \phi_+ | \mathbf{p} | \phi_+ \rangle = 0 \quad \langle \phi_- | \mathbf{p} | \phi_- \rangle = 0$
 (g) $E_{kin} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ för båda tillstånden
 (h) $\langle \phi_+ | V(x) | \phi_+ \rangle = -V_0/2 \quad \langle \phi_- | V(x) | \phi_- \rangle = V_0/2$
 (i) $E_g = V_0$
 (j) Planvågor med $k_2 = k_1 \pm 2 \cdot \pi/a$ kopplas inte av den andra termen ($V_1 \cos(\frac{4\pi}{a}x)$), så våra räkningar ändras inte. Planvågor med $k_2 = k_1 \pm 4 \cdot \pi/a$ kopplas däremot ihop av den andra termen, och ger ett bandgap av storlek V_1 vid $k = \pm 2 \cdot \pi/a$.

23. (a) $E_n^0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2$ $\phi_n^0 = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{n\pi x}{L})$
- (b) Skriv om vågfunktionerna med Eulers regler, så blir integralerna lättare att lösa.
- (c) Se figur 4.2 i kompendiet
- (d) Se figur
- (e) Energierna blir samma som de ostörda energiegenvärdena;
 $\langle \phi_n^0 | H' | \phi_n^0 \rangle = 0$ för alla n .
- (f) Antagligen konstruktion i). Konstruktion ii) blir helt symmetrisk runt mitten av brunnen medan konstruktion iii) visserligen blir asymmetrisk men har noder.
- (g) -
- (h)

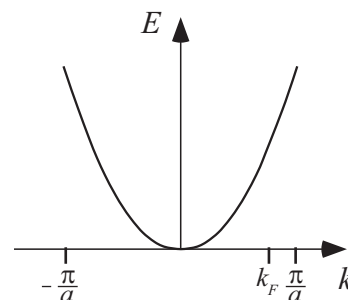


$$E = \frac{E_1^0 + E_2^0}{2} \pm \sqrt{\frac{(E_2^0 - E_1^0)^2}{4} + C^2}$$

- (i) Lägsta tillståndet har lägre energi än den ostörda grundtillståndsenergien

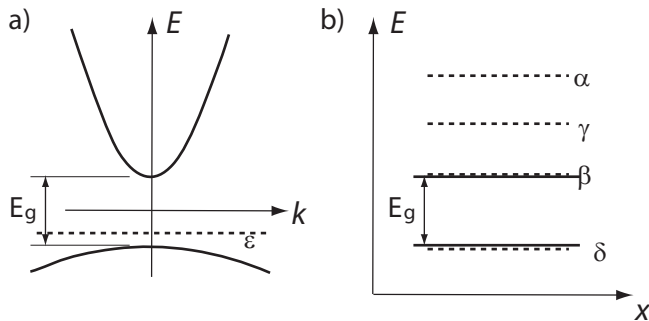
$$E = \frac{E_1^0 + E_2^0}{2} - \sqrt{\frac{(E_2^0 - E_1^0)^2}{4} + C^2} < E_1^0$$

24. (a) $\lambda_F = 4,64 \cdot 10^{10}$ m.
- (b) Se skiss till höger. $k_F = 2\pi/\lambda_F \approx 1,35 \cdot 10^{10}$ m.
- (c) Ledningselektroner i koppar kan inte Braggreflekteras eftersom $k_F < \pi/a$. Valenselektronerna i koppar har för lång våglängd (för kort vågvektor eller ekvivalent för låg energi). Vi förväntar oss alltså inget bandgap nära E_F och koppar borde då vara en metall.



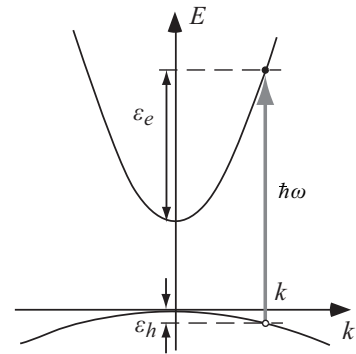
25. (a) $E_F(z=3) = 13,54$ eV $E_F(z=4) = 24,07$ eV
- (b) $E = 6,02$ eV och $E = 24,07$ eV
- (c) Antagligen är kristallen en isolator om atomerna har $z = 4$ valenselektroner. Två hela band är då fyllda.
- (d) Aluminium med 3 valenselektroner är en metall, medan kisel med 4 valenselektroner är en isolator (halvledare). Generellt sett kan man inte alltid dra rätt slutsats om hurvida ett ämne är en metall eller en isolator från en en-dimensionell modell som vi gör här. Ämnen med ett udda antal valenselektroner har dock något delvis fyllt band och är metalliska. Ämnen med ett jämnt antal valenselektroner kan vara metaller (t.ex. magnesium) eller naturligtvis också isolatorer/halvledare.

26. (a) $k_{\text{fonon}} \approx 2k_F = 2,7 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-1}$
 (b) $E' - E = -\hbar\omega$, $\hbar\omega = 64 \text{ meV}$
 (c) $\frac{\hbar\omega}{E_F} = 0,009$
27. (a) Från figuren blir energin ca 1,8-1,9 eV (mätt från ett tillstånd vid Ferminivån rakt upp till nästa band). När fotonenergin är så här stor eller större kan elektroner vid eller under Ferminivån exciteras till nästa band utan att behöva ändra sin vågvektor (vilket kräver samverkan med en fonon förutom fotonen).
- (b) Med fri-elektron modellen, där man antagit att natrium har en valenselektron per atom och att koncentrationen natriumatomer är $2,65 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$, blir den nödvändiga fotonenergin 2,07 eV.

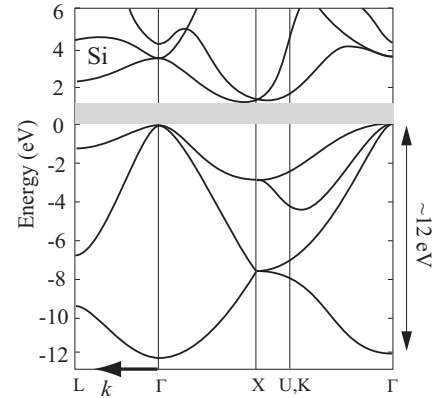


28. Tillstånd med ett väldefinierat k är obestämda i rummet, medan tillstånd med en bestämd position i materialet är obestämda i k -rummet (ett sådant tillstånd beskrivs av en superposition av många planvågor med olika k som tillsammans bygger ett samlat vågpaket). Även i banden har dock inte tillstånden helt bestämda k - närvaron av den periodiska potentialen leder ju till superpositioner av flera planvågor. Dessa superpositioner av planvågor är dock inte lokaliserade, utan utbredda över hela kristallen.

29. (a) se figur
 (b) $k = (\hbar\omega - E_g)^{1/2} \left(\frac{\hbar^2}{2m_e^*} + \frac{\hbar^2}{2m_h^*} \right)^{-1/2}$ $\varepsilon_e = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e^*}$ $\varepsilon_h = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_h^*}$
 (c) $k = 3,1 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1}$, $\varepsilon_e = 0,26 \text{ eV}$, $\varepsilon_h = 0,01 \text{ eV}$



30. (a) Se figur. Bandgapet är markerat i grått.
 (b) Kisel har ett indirekt bandgap och ljus-utsändning är därför ineffektiv - övergångar mellan banden sker i stor utsträckning med hjälp av absorption eller emission av många fononer (även med hjälp av störställen i kristallen, mer om störställen i kap 6).
 (c) $E_F = 12,47 \text{ eV}$
 (d) Det beräknade E_F motsvarar ungefär vidden av de fyllda banden i figuren.
31. (a) $N_A = 1,25 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$
 (b) $\sigma = en\mu_e + ep\mu_h$
 (c) $\mu_h = 0,014 \text{ m}^2/\text{Vs}$, $\mu_e = 0,14 \text{ m}^2/\text{Vs}$
 (d) $n_i = 3,16 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$. Bandgapet för denna okända halvledare är mindre än för kisel.
32. Effektiva Bohrradien blir ca 10 nm. Donatortillstånden börjar överlappa vid ca 10^{23} m^{-3} . Överlappet kan leda till uppkomsten av ett band under ledningsbandskanten då delokaliserade vågfunktioner uppbyggda av många donatortillstånd kan bildas.
33. (a) $E_C - E_F = 0,33 \text{ eV}$ (använt effektiv massa och $T = 300 \text{ K}$. Vakuummassan ger 0,38 eV)
 (b) $E_C - E_F = 0,27 \text{ eV}$ (använt effektiv massa och $T = 300 \text{ K}$. Vakuummassan ger 0,32 eV)
 (c) Fermifördelningarna går från 1 till 0 över ett lika stort energintervall (eftersom temperaturen är densamma), men fermifördelningen i b) är något förskjuten till högre energier.
34. (a) $\mu_e = 0,043 \text{ m}^2/\text{Vs}$
 (b) $E_C - E_F = 0,14 \text{ eV}$ (räknat med effektiva massan, vakuummassan ger 0,19 eV)
 (c) $F(E_C) = 0,0048$. Om man använder vakuum-massan blir $F(E_C) = 6 \cdot 10^{-4}$.
 (d) Vi kan bortse från Pauliprincipen
35. (a) $n = N_D^+ = N_D/2 = 0,5 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3}$
 (b) E_F sammanfaller med E_D
 (c) i) $T \approx 90 \text{ K}$ och ii) $T \approx 370 \text{ K}$, där vi har antagit att $N_C = 2,5 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ (dvs vakuum-massa och 300 K)
 (d) en grafisk lösning av $N_D/2 = N_C e^{-(E_C - E_D)/kT}$ ger i) $T = 120 \text{ K}$ och ii) $T = 360 \text{ K}$.



36. (a) $\alpha = \frac{3}{2}kT$ dvs (kinetiska) medelenergin för fria partiklar i tre dimensioner

(b)

$$E_{tot} = 2 \left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} (E_g + \alpha) e^{-E_g/2kT} = n \times (E_g + \alpha)$$



37. (a) se figur

(b) $N_D = 8,3 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$, $N_A = 1,4 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$



38. (a) ungefär 0,71 eV efter uppskattning ur figuren (samma metod som på lab).

(b) De som överhuvudtaget går att skilja åt har olika dopkoncentration, doptyp (n eller p) kan vi inte säga något om.

(c) Dopkoncentrationen kan uppskattas från brytpunkten mellan intrinsiska och mätnadsområdet, och vi får ca till $3,6 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3}$, där vi använt effektiva massor för Ge, $T = 300 \text{ K}$ och E_g från deluppgift a).

Då y-axeln ger konduktiviteten kan vi även läsa av konduktiviteten i mätnadsområdet och beräkna laddningsbärar- eller dopkoncentrationen (det kunde man inte på labben). Om vi läser av σ till $10^{-1,5} (\Omega \cdot \text{cm})^{-1}$ och använder mobiliteter från formelsamlingen får vi ca $5,5 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$ om provet är n-dopat och $1,1 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$ om provet är p-typ.

39. (a) se kompendiet (och lab). Massverkans lag ger sambandet mellan p_{n0} och n_{n0} .

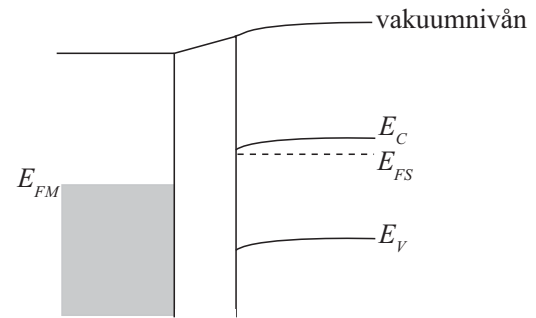
(b) Man vill att komponenten ska arbeta i det mättade området, där laddningsbärarkoncentrationerna motsvarar dopkoncentrationerna.

(c) Övre temperaturgränsen kan uppskattas från $n_i = N_D$ och blir c:a 1100 K, medan den lägre gränsen kan fås från $n = N_D$, där n är elektronkoncentrationen (vi antar att excitationen över bandgapet är liten jämfört med den från dopnivåerna). Den lägre temperaturgränsen blir c:a 100 K. Vi har använt fri-elektronmassor i räkningarna och använt $T = 300 \text{ K}$ för att uppskatta faktorer som är förhållandevis svagt temperaturberoende.

40. (a) $5,6 \cdot 10^{16}$ tillstånd (med effektiva massan för Si), vakuum-massan ger $9,8 \cdot 10^{16}$ tillstånd
 (b) Hålkoncentrationen multiplicerat med volymen ger 10^{13} hål
 (c) Ja - Pauliprincipen spelar ingen roll
 (d) $\ell = v_{th} \cdot \tau \approx 25$ (26.5) nm (lägg märke till att vi använder v_{th} !). Vi måste få tag i spridningstiden τ - här finns nog ingen annan möjlighet än att beräkna den från mobiliteten i formelsamlingen. Här har man använt effektiva massan, med vakuum-massan blir fria medelväglängden ca 30 nm. Skillnaden hade blivit större om vi hade löst problemet för elektroner i ledningsbandet, eftersom deras effektiva massa skiljer sig mer från vakuum-massan.
41. Absorptionen startar vid ungefär $\lambda = 1830$ nm, bandgapet är alltså ungefär 0,68 eV.
42. (a) $(U = 0,1\text{V}) \rightarrow I = 4,7 \cdot 10^{-7}$ A
 (b) $(U = 0,3\text{V}) \rightarrow I = 1,1 \cdot 10^{-3}$ A
 (c) $(U = 0,5\text{V}) \rightarrow I = 2,5$ A
43. Man har lagt på ytterligare c:a 0,1 V.
44. Kisel är lämpligast - det har större bandgap.
45. (a) I utarmningsområdet.
 (b) I riktning från n-sidan till p-sidan.
46. Ledning - använd t.ex. en av "definitionerna" av ψ_0 i figur 7.1 eller 7.5.
47. (a) $x_n = 0,88\mu\text{m}$, $x_p = 88\text{nm}$
 (b) Backspänd diod
 (c) $-U = 3\psi_0 = 2,0$ V

48. (a) $0,88 \mu\text{m}$
 (b) $\Delta\psi = 23,6 \text{ mV}$
 (c) Om man skriver $n = N_D e^{-e\Delta\psi/kT}$ får man $n = 4,0 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$, $p = 2,5 \cdot 10^{11} \text{ m}^{-3}$. Använd inte uttrycket här utan att klura på var det kommer ifrån! Fundera på vad uttrycket ger då $\Delta\psi = 0$, dvs utanför utarmningsområdet, och hur $\Delta\psi$ borde påverka bandkanterna. Man kan även mer direkt "räkna" med uttrycket för n från formelsamlingen, men svaret blir inte precis detsamma.
 (d) $\rho = 95,9 \text{ C/m}^3$, eller $1,602 \cdot 10^{-19} \times 5,99 \cdot 10^{20} \text{ C/m}^3$. N_D dominerar!
49. (a) i) se fig 7.7 i kompendiet ii) se fig 7.8 i kompendiet
 (b) se kompendiet
 (c) se kompendiet
 (d) $\psi_0 = 0,42 \text{ V}$ (lite mindre än E_g/e , som det ju bör vara enligt våra teorier) och $\mathcal{E}_{max} = 2,9 \cdot 10^6 \text{ V/m}$
 (e) $\psi_0 - U = 19,8 \text{ V}$, så U är ca $-19,4 \text{ V}$
50. (a) $n_{n0} = N_D$ och $n_{p0} = n_i^2/N_A = 1,6 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-3}$
 (b) $p_{n0} = n_i^2/N_D = 3,4 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$ och $p_{p0} = N_A$
 (c) $p_n = p_{p0} e^{-e(\psi_0 - U)/kT} = p_{n0} e^{eU/kT} = 1,6 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$
 $n_p = n_{n0} e^{-e(\psi_0 - U)/kT} = n_{p0} e^{eU/kT} = 7,6 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-3}$
 (d) Långt från utarmningsområdet har minoritetsladdningsbärarkoncentrationerna sina jämviktsvärden.
51. (a) $T = 490 \text{ K}$ ($494,9 \text{ K}$)
 (b) $I_0 = 8,8 \cdot 10^{-19} \text{ A}$
 (c) $p = N_A = 1,06 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3}$
 (d) $\psi_0 = 1,76 \text{ V}$
 (e) $A = 1,51 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$

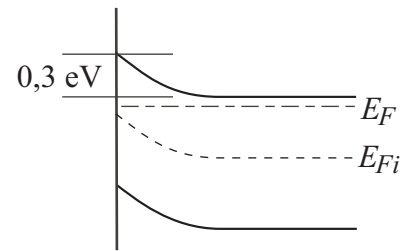
52. positiva polen till metallen, negativa till halvledaren.



53. (a) se figur

(b) $w = 0,199 \mu\text{m} \approx 0,20 \mu\text{m}$ och $\mathcal{E}(0) = 3,02 \cdot 10^6 \text{ V/m}$

(c) $-3,18 \cdot 10^{-4} \text{ C/m}^2$ (laddningen i metallen är negativ).



54. b är den enda som ger en inverterare.