

MEKANIKSAMMANFATTNING

RÖRELSE

Rörelse längs en rät linje

Låt oss börja med begreppet medelhastighet. Ett föremål som rör sig rätlinjigt, t.ex. längs en x -axel, befinner sig vid tiden t_0 i läge x_0 och vid en senare tidpunkt t_1 i läge x_1 . Medelhastigheten definieras som föremålets förflyttning, $x_1 - x_0$, dividerad med tiden som förflutit $t_1 - t_0$.

$$v_{\text{medel}} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Vill vi ha ett mått på hur stor ett föremåls hastighet är i ett visst ögonblick, måste vi gå över till *momentanhastighet*. Vi tittar då på kvoten $\Delta x / \Delta t$ under en mycket kort tid, dvs. vi låter $\Delta t \rightarrow 0$.

$$v_{\text{mom}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Vad vi gör är alltså att beräkna *derivatan av förflyttningen med avseende på tiden*. Som framgår av ekvationerna ovan måste SI-enheten för hastighet vara 1 m/s. När vi i fortsättningen talar om "hastigheten" menar vi momentanhastigheten.

Om vi känner hur ett föremåls hastighet varierar med tiden, $v = f(t)$, kan vi lätt bestämma förflyttningen genom att integrera

$$\int_{x_0}^{x_1} dx = \int_{t_0}^{t_1} v \cdot dt \Rightarrow x_1 = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} v \cdot dt$$

Speciellt enkelt blir det om v är konstant, eftersom förflyttningen då blir lika med hastigheten gånger tidsintervallet dvs.

$$\Delta x = v \cdot \Delta t$$

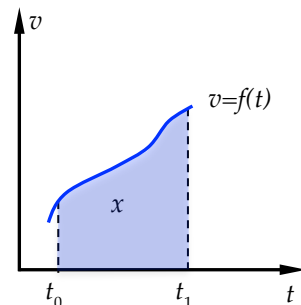
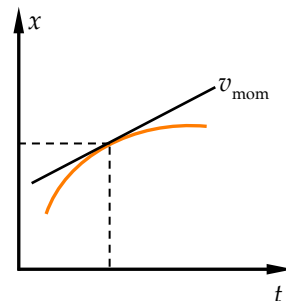
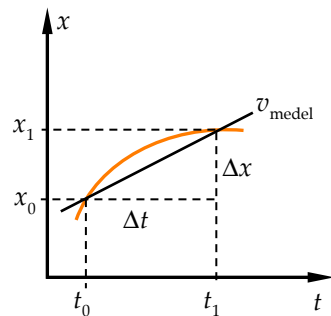
Om v varierar under Δt säger vi att rörelsen är *accelererad*. I det enklaste fallet är rörelsen *likformigt accelererad*, dvs. accelerationen konstant. Om hastigheten vid tiden t_0 är v_0 , och vid tiden t_1 är v_1 definieras medelaccelerationen som

$$a_{\text{medel}} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

På samma sätt som tidigare definierar vi momentanaccelerationen som

$$a_{\text{mom}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Som framgår av ekvationerna ovan måste SI-enheten för acceleration vara 1 m/s². När



vi fortsatt talar om "accelerationen" menar vi alltid momentanaccelerationen.

Om vi vet hur accelerationen varierar med tiden, får vi hastigheten genom att integrera

$$\int_{v_0}^{v_1} dv = \int_{t_0}^{t_1} a \cdot dt \Rightarrow v_1 = v_0 + \int_{t_0}^{t_1} a \cdot dt$$

Vi ser också det direkta sambandet mellan acceleration och förflyttning

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Notera att såväl hastighet som acceleration är *vektorstorheter* som alltså både har en storlek och en riktning. I det enkla fallet ovan, då ett föremål rör sig längs en x -axel, är hastigheten och accelerationen riktade längs positiva eller negativa x -axeln, och således antingen positiva eller negativa. Om hastighet och acceleration har samma tecken är rörelsen accelererad. Om hastighet och acceleration har olika tecken är rörelsen retarderad.

EXEMPEL 1 – Medelhastighet

När du cyklar iväg till dagens första föreläsning beskrivs din hastighet under de 6 första sekunderna av uttrycket

$$v = bt^2 + ct \text{ där } b = -\frac{1}{6} \text{ m/s}^3 \text{ och } c = 2 \text{ m/s}^2$$

a Hur stor är din acceleration i startögonblicket?

Accelerationen ges av

$$a = \frac{dv}{dt} = 2bt + c \Rightarrow a(0) = 2 \text{ m/s}^2.$$

b Hur stor är din acceleration efter 6 sekunder?

Enligt ovan blir $a(6) = 0 \text{ m/s}^2$.

c Bestäm hastigheten efter 3 sekunder.

Insatt i uttrycket för hastigheten blir $v(3) = 4,5 \text{ m/s}$.

d Bestäm hastigheten efter 6 sekunder.

På samma sätt som ovan blir $v(6) = 6 \text{ m/s}$.

e Hur lång sträcka rör du dig de 6 sekunderna?

Sträckan får vi genom integration av hastighetsuttrycket enligt

$$s = \int_0^6 \left(-\frac{1}{6}t^2 + 2t \right) dt = \left[-\frac{1}{18}t^3 + t^2 \right]_0^6 = 24 \text{ m}.$$

f Vilken är din medelhastighet under de 6 sekunderna?

$$v_{\text{medel}} = \frac{24}{6} \text{ m/s} = 4 \text{ m/s}.$$



Krokinlig rörelse

När ett föremål inte längre rör sig längs en rät linje, utan följer en kurva av något slag, kallas rörelsen för krokinlig. Föremålets hastighet definieras fortfarande som "förflyttning per tidsintervall" dvs.

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Vi använder här beteckningen s för att poängtera att rörelsen sker längs en godtycklig kurva.

Även uttrycket för accelerationen ser likadant ut som tidigare, dvs.

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

Det som skiljer den krokinliga rörelsen från den rätlinjiga är *riktningarna* på hastigheten och accelerationen. Det är lätt att visa att hastighetsvektorn vid krokinlig rörelse alltid är tangentiell mot kurvformen. T.ex. så är hastighetsvektorn vid cirkulär rörelse alltid vinkelrät mot radien på cirkeln. Accelerationen har samma riktning som *hastighetsändringen*, dvs.

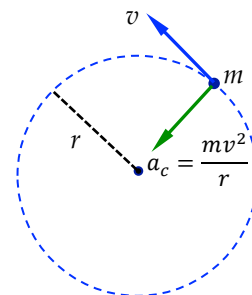
$$a = \frac{dv}{dt},$$

för såväl den krokinliga som den rätlinjiga rörelsen. Eftersom accelerationen vid rätlinjig rörelse endast kan vara riktad med eller mot hastighetsvektorn, kommer accelerationen alltid att ändra storleken på hastigheten.

För den krokinliga rörelsen kan acceleration innebära ändring av *både hastighetens storlek och dess riktning*. Specialfallet, cirkulär rörelse med konstant hastighet, innebär en konstant acceleration som *endast ändrar hastighetens riktning*. I det fallet är accelerationen hela tiden vinkelrät mot hastigheten, och har således aldrig någon komponent i hastighetsriktningen. Följaktligen ändras inte hastighetens belopp, bara dess riktning. Accelerationen kallas i detta speciella fall *centripetalacceleration* och skrivs som

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

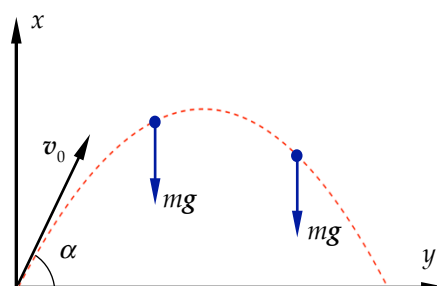
där r är radien i cirkeln.



EXEMPEL 2 – Kaströrelse

Ett vanligt specialfall av den krokinliga rörelsen är den rörelse som uppstår då ett föremål utsätts för en acceleration som är konstant både till storlek och riktning.

En kula kastas ut med hastigheten v_0 i en vinkel α mot horisontalplanet. Om vi försummar luftmotståndet påverkas kulan bara av tyngdkraften $m \cdot g$, som hela tiden är riktad nedåt (i negativ y -led) i figuren. Tyngdkraften kommer att för-



ändra kulans hastighet i y -led, medan hastigheten i x -led förblir oförändrad. Vi har alltså att göra med en kombination av en likformig rörelse (x -led) och en likformigt accelererad rörelse (y -led).

Rörelse i x -led

$$a_x = 0 \xRightarrow{\text{integration}} v_x = v_x(0) = v_0 \cdot \cos \alpha = \text{konstant} \xRightarrow{\text{integration}} x(t) = v_x \cdot t = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha \text{ (sätt } x(0) = 0)$$

Rörelse i y -led

$$a_y = -g = \text{konstant} \xRightarrow{\text{integration}} v_y(t) = v_y(0) - g \cdot t = v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t \xRightarrow{\text{integration}} y(t) = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{g \cdot t^2}{2} \text{ (sätt } y(0) = 0)$$

Kasthöjd

Då kulan når sin högsta höjd är $v_y(t_1) = 0$. Detta medför att

$$v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t_1 = 0 \text{ och att } t_1 = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g}.$$

Genom att sätta in detta uttryck för tiden i $y(t)$ får vi kasthöjden enligt

$$y(t_1) = v_0 \cdot \left(\frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \right) \cdot \sin \alpha - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \right)^2 = \frac{(v_0 \cdot \sin \alpha)^2}{2g}.$$

Kastlängd

Kulans bana beskrivs av en parabel, och om kulan *kastas från markhöjd* når den åter marken vid tiden $t_2 = 2t_1$. Genom att sätta in detta uttryck för tiden i $x(t)$ får vi kastlängden enligt

$$x(t_2) = x(2t_1) = v_0 \cdot 2t_1 \cdot \cos \alpha = v_0 \cdot \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \cdot \cos \alpha = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha$$

Såväl kastets höjd som dess längd bestäms alltså av utgångshastighetens storlek och riktning.

EXEMPEL 3 – Kulstötning

En kulstötare stöter iväg en kula från höjden $h = 1,6$ m. Kulan lämnar handen med hastigheten 12 m/s, som bildar vinkeln 45° med horisonten. Hur lång blir kulstöten?

För att kunna räkna ut stötens längd behöver vi



Foto: Matt Dunham / AP

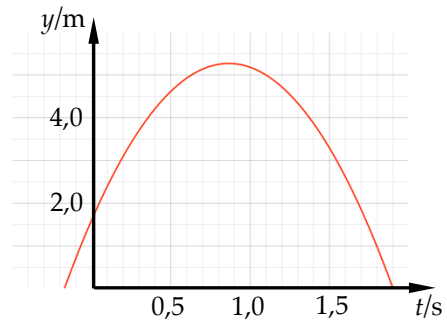
känna tiden rörelsen tar. Denna får vi genom att teckna uttrycket för stötens rörelse i y -led och sedan söka den tid för vilken $y = 0$, dvs. då kulan når markhöjd.

$$y(t) = h + v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

$$y(t) = 0 \Rightarrow 1,6 \text{ m} + (12 \text{ m/s}) \cdot t \sin 45^\circ - \frac{(9,81 \text{ m/s}^2) \cdot t^2}{2} = 0 \Rightarrow t \approx 1,9 \text{ s}$$

Detta betyder att stötens längd blir 16,1 m.

Notera att andragradsekvationen också ger en negativ lösning. Detta beror på att funktionen har ett andra nollställe som ligger så att det beskriver rörelsen "innan" rörelsen börjar, se figuren. Lösningen har alltså ingen fysikalisk mening.



En parentes om cirkulär rörelse

När vi diskuterar ett föremål i cirkulär rörelse är det naturligt att förutom tangentiell hastighet också definiera en *rotationshastighet* eller *vinkelhastighet*. Hastigheten v är ju definierad som

$$v = \frac{ds}{dt},$$

där s representerar cirkelbågen. Vinkelhastigheten ω är ett mått på hur stor vinkel föremålet rör sig under en given tidsperiod, dvs.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}.$$

Eftersom $\theta = \frac{s}{r}$ blir $\omega = \frac{1}{r} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{v}{r}$ (då r är konstant.)

Då θ är en dimensionslös storhet får vinkelhastigheten ω dimensionen $(\text{tid})^{-1}$. Enheten för vinkelhastighet är således 1 s^{-1} . (Vinkelhastighet kallas för övrigt ibland för vinkelfrekvens.) I analogi med det som sagts tidigare, uttrycks ω ofta i "radianer per sekund". Rotationshastigheten "1 varv per sekund" motsvarar alltså att $\omega = 2\pi \text{ s}^{-1}$ eller " 2π radianer per sekund".

Vinkelaccelerationen a definieras som

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{r} \frac{dv}{dt} = \frac{a}{r}.$$

Observera att accelerationen a är en *tangentiell acceleration* dvs. har samma riktning som hastigheten. Detta betyder att den inte ändrar föremålets rörelseriktning utan bara dess belopp.

Så länge vi sysslar med cirkulär rörelse med konstant hastighet (vilket oftast är fallet) är $a = 0$ och centripetalaccelerationen

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \text{ den enda som är av intresse.}$$

EXEMPEL 4 – Tyngdlöshet

Vi ser ofta att en astronaut (eller kosmonaut) tillstånd på en rymdstation beskrivs som "tyngdlöst". Vi har fått lära oss att det är fel att beskriva tillståndet som "viktlöst", eftersom ingen, var han än befinner sig, är utan massa (= vikt). Men är man verkligen utan tyngd ombord på en rymdstation?

Den internationella rymdstationen ISS kretsar på höjden $h \approx 370$ km ovanför jordytan. Hur stor är jordens dragningskraft på en astronaut ombord på rymdstationen jämfört med jordens dragningskraft vid jordytan?

Newtons gravitationslag beskriver kraftverkan mellan två kroppar, dvs.

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}.$$



Här är G gravitationskonstanten, m och M kropparnas respektive massor och R avståndet mellan kropparnas masscentrum. Kalla dragningskraften vid jordytan för F_y och dragningskraften på ISS för F_I och teckna kvoten F_I/F_y . R_J betecknar jordens radie.

$$F_y = G \cdot \frac{m \cdot M}{R_J^2} \text{ och } F_I = G \cdot \frac{m \cdot M}{(R_J + h)^2} \Rightarrow \frac{F_I}{F_y} = \frac{R_J^2}{(R_J + h)^2} \approx 0,9$$

Man är alltså inte "tyngdlös" ombord på rymdstationen, tyngden är bara något reducerad.

Eftersom astronauten (och rymdstationen) befinner sig i en cirkulär bana runt jorden, kommer tyngdkraften hela tiden att vara vinkelrät mot hastigheten. Detta innebär att tyngdkraften orsakar en centripetalacceleration och således bara förändrar hastighetens riktning.

Eftersom både astronauten och rymdstationen (och allting inuti densamma) utsätts för en lika stor acceleration ($a_c = \frac{v^2}{r}$), syns astronauten "sväva" fritt i rymdstationen.

Situationen kan jämföras med hur det skulle vara att befinna sig i en fritt fallande hiss. Om både du och hissen accelererar på samma sätt, är du "svävande" i förhållande till hissen.

KRAFTER

Jämvikt

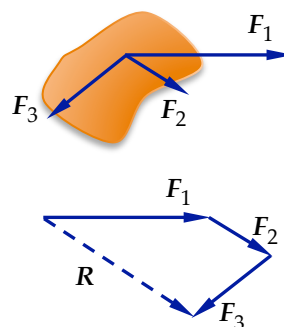
Innan vi närmare kan börja studera vad som ligger bakom olika typer av rörelser, måste några ord sägas om krafter. Låt oss börja med ett enkelt fall; ett antal krafter som angriper en (stel) kropp i en och samma punkt¹. Kraft är en vektorstorhet, och den resulterande kraften R är helt enkelt vektorsumman av de enskilda krafterna;

¹ Ofta börjar man med att studera "partiklar", alltså föremål utan utsträckning. Nästa steg är att studera "stela kroppar", föremål vars form inte påverkas av de applicerade krafterna.

$$\sum_i F_i = R,$$

se figuren. Krafters storlek uttrycks i enheten 1 N. Vi ska senare se hur denna enhet är uppbyggd av SI-systemets grundenheter.

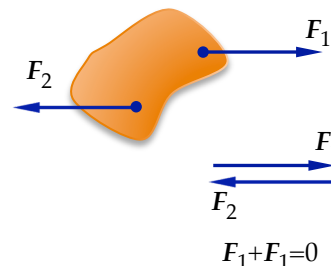
Om resultanten är lika med noll sägs föremålet befinna sig i *jämvikt*. $R = 0$ kallas för ett *jämviktsvillkor*. Detta betyder att föremålet, om det är i vila från början, förblir i vila.



Skulle krafterna angripa föremålet i *olika* punkter ställs ytterligare krav för att jämvikt ska inställa sig. Med olika angreppspunkter kommer krafterna, även om $R = 0$, att kunna åstadkomma en rörelse, nämligen en *rotation*. För att en stel kropp som påverkas av ett antal krafter (med olika angreppspunkter) ska kunna sägas vara i jämvikt krävs, förutom det första jämviktsvillkoret, ett andra villkor. Kravet är att summan av alla *vridmoment* $\bar{\tau}_i$ ska vara lika med noll; $\sum_i \tau_i$.

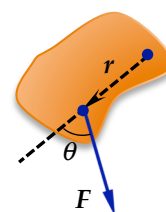
Vridmoment

Vridmomentet definieras som $\tau = r \times F$ där r är vektorn som definierar avståndet (och riktningen) mellan kraftens angreppspunkt A och punkten O runt vilken föremålet roterar. Det betyder att $\tau = r \cdot F \sin \theta$. En kraft som angriper direkt i rotationspunkten O, orsakar således inte något vridmoment. Storleken på ett vridmoment anges i enheten 1 Nm.



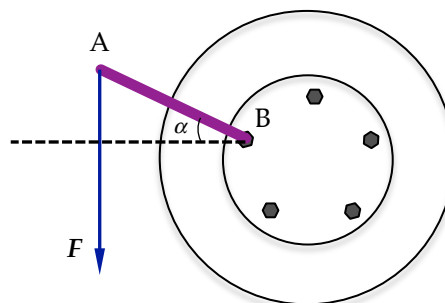
De båda jämviktsvillkoren ovan kallas för villkor för translations- respektive rotationsjämvikt. Båda måste vara uppfyllda om föremålet (som alltså har utsträckning) ska befinna sig i jämvikt.

Av ovanstående kan vi förstå att nyckeln till en *ändring* av ett rörelsetillstånd är en kraft. För att ändra storleken av eller riktningen på den hastighetsvektor v som beskriver ett föremåls rörelse, krävs en kraft $F \neq 0$. Detta påstående kallas ofta för "Newtons första lag".



EXEMPEL 5 – Vridmoment

Om du för hand ska lossa ett hjul på bilen använder du ett s.k. fälgkors eller något liknande som har en hävarm. När du fäst hävarmen på en av skruvarna som håller fast hjulet, bildar den vinkeln $\alpha = 20^\circ$ mot horisontalplanet, se figuren. För att rubba skruven krävs att du ställer dig längst ut på hävarmen. Om du väger 60 kg kommer kraften $F = 60 \cdot 9,81 \text{ N} = 588,6 \text{ N}$ att verka i punkten A. Kraften är riktad rakt nedåt och för att beräkna vridmomenten kring punkten B dvs. skruven, måste vi känna storleken på den komponent av hävarmen som är vinkelrät mot kraften. Om hävarmen är 20 cm lång blir den sökta komponenten $0,20 \cdot \cos 20^\circ \text{ m} \approx 0,187 \text{ m}$. Vridmomentet kan då beräknas enligt

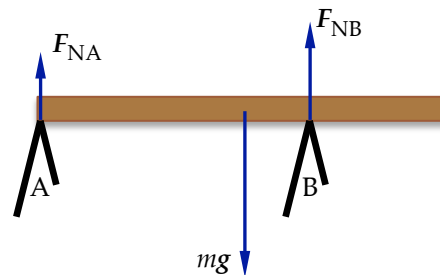


$$\tau = 588,6 \cdot 0,187 \dots \text{ Nm} = 110,6 \dots \text{ Nm} \approx 110 \text{ Nm}$$

Notera att vi i definitionen av vridmomentet skriver $|\tau| = r \cdot F \sin \theta$ och att θ alltså avser vinkeln mellan hävarmen r och kraften F . I vårt exempel med hjulet är $\theta = 90^\circ - \alpha$ och $\sin \theta = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.

EXEMPEL 6 – Statisk jämvikt

Låt oss nu titta lite närmare på ett jämviktsproblem. En homogen plank med massan 20 kg och längden 4 m ligger horisontellt över två bockar, se figuren. Den ena bocken ligger an mot brädan i punkten A, som är brädans ena ändpunkt. Den andra bocken ligger an mot punkten B, som är belägen 2,5 m från A. Eftersom brädan är i jämvikt, är



$$\sum_i F_i = 0 \text{ och } \sum_i \tau_i = 0$$

Tre krafter verkar på brädan. Den nedåtriktade tyngdkraften $m \cdot g$ verkar i brädans masscentrum, dvs. 2 m från A. De båda andra krafterna F_{NA} och F_{NB} är s.k. normalkrafter (se sidan XX) och verkar i punkterna A respektive B. Eftersom jämvikt råder måste $F_{NA} + F_{NB} = mg$.

När det gäller vridmomenten kan de tecknas på oändligt många sätt, eftersom valet av vridpunkt är godtyckligt. Dock finns två vridpunkter som är bättre än alla andra: A eller B. Väljer vi någon av dessa punkter som vridpunkt, eliminerar vi automatiskt en av de obekanta normalkrafterna, eftersom denna då verkar på kroppen utan att orsaka något vridmoment.

Om vi väljer A som vridpunkt, kan vi teckna vridmomenten som orsakas av mg och F_{NB} .

Tyngdkraften verkar på en momentarm (hävarm) som är 2 m lång, och vill vrida brädan medurs.

$$\bar{\tau} = 2 \text{ m} \cdot 20 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 392,4 \text{ Nm}$$

Normalkraften verkar på en momentarm som är 2,5 m lång, och vill vrida brädan moturs.

$$\bar{\tau} = 2,5 \text{ m} \cdot F_{NB}$$

Vid jämvikt är $\bar{\tau} = \bar{\tau} \Rightarrow F_{NB} = 156,96 \text{ N}$ vilket innebär att

$$F_{NA} = m \cdot g - F_{NB} = 20 \cdot 9,81 \text{ N} - 156,96 \text{ N} = 39,24 \text{ N}$$

Erfarenheten säger oss att om vi nu trycker med en nedåtriktad kraft F på brädans högra ändpunkt, så kommer vi, förr eller senare, att kunna få brädan att tippa. Hur stor kraft behövs för att detta ska hända?

Brädan kommer att vrida sig kring punkten B och precis i det ögonblick som brädan börjar tippa blir $F_{NA} = 0$. Tyngden ger vridmomentet

$$\bar{\tau} = 0,5 \text{ m} \cdot 20 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 98,1 \text{ Nm} \text{ och tryckkraften ges av}$$

$$\bar{\tau} = F \cdot 1,5 \text{ m. Tillsammans ger det } \bar{\tau} = \bar{\tau} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = 65,4 \text{ N som alltså är den kraft som behövs.}$$

Rörelsemängd

Storleken på den kraft som behövs för att ändra ett rörelsetillstånd, kommer dels att bero på storleken på den hastighetsändring Δv man vill åstadkomma, dels på föremålets massa. Detta skulle också kunna uttryckas med hjälp av föremålets så kallade *rörelsemängd*, p .

Rörelsemängden definieras som $p = m \cdot v$ alltså produkten av ett föremåls massa och hastighet. Rörelsemängden är således en vektorstorhet (med samma riktning som hastighetsvektorn) vars storlek uttrycks i enheten 1 kgm/s.

EXEMPEL 7 – Rörelsemängd – en jämförelse

Låt oss nu, för att få lite känsla för storleksordningar, jämföra rörelsemängden hos några olika rörliga föremål

... en gevärskula med massan $m_1 = 15$ g, som skjuts iväg med hastigheten 500 m/s.

... en tennisboll med massan $m_2 = 60$ g, som av en spelare i världsklass ges hastigheten 216 km/h.

... en kokosnöt med massan $m_3 = 1,0$ kg, som fallit fritt från höjden 10 m.



För gevärskulan gäller att $p_1 = 0,015 \text{ kg} \cdot 500 \text{ m/s} = 7,5 \text{ kgm/s}$. På samma sätt blir rörelsemängden för tennisbollen $p_2 = 0,060 \text{ kg} \cdot \frac{216}{3,6} \text{ m/s} = 3,6 \text{ kgm/s}$. För att

bestämma kokosnötens rörelsemängd blir vi först tvungna att bestämma vilken hastighet den har när den fallit fritt sträckan 10 m. Accelerationen är konstant lika med g . Det betyder att vi kan skriva $v = g \cdot t_1$ (om nöten är i vila när den börjar falla och t_1 är den tid fallet tar). Sträckan s kan tecknas som

$$s = \int_0^{t_1} v \cdot dt = \int_0^{t_1} g \cdot t \cdot dt = \frac{g \cdot t_1^2}{2}.$$

Sätter vi ihop dessa båda uttryck och eliminerar t_1 får vi $v^2 = 2gs \Rightarrow v = 14 \text{ m/s}$. Detta betyder att rörelsemängden blir $p_3 = 1 \text{ kg} \cdot 14 \text{ m/s} = 14 \text{ kgm/s}$.

Rörelsemängden kan i viss mån sägas vara ett mått på hur "svårstoppad" ett rörligt föremål är. Att tennisbollen är lättare att stoppa än gevärskulan kan vi hålla med om. Men kokosnötens stora rörelsemängd innebär inte nödvändigtvis att det i praktiken är så svårt att stoppa den. För en mer fullständig beskrivning behöver vi också diskutera föremålens *rörelseenergier*. Vi återkommer till dessa i ett senare exempel.

En nettokraft åstadkommer alltid en hastighetsändring och därmed också en rörelsemängdsändring;

$$F = \frac{dp}{dt}.$$

Vill man, så kan man vända på det och säga att en kraft F som verkar under en tid dt orsakar en rörelsemängdsändring $dp = m \cdot dv = F \cdot dt$.²

Vill vi stanna en bil eller bromsa en cykel måste vi, för att rörelsemängden ska bli noll, låta en kraft verka under en viss tid. Vi kan välja om vi vill låta en stor kraft verka under kort tid eller en mindre kraft verka under längre tid. Oftast måste vi dock se till att kraften inte blir *alltför* stor. En stor kraft bromsar visserligen bilen effektivt, men är den alltför stor, som t.ex. vid en krock, så deformerar den också bilen och människorna i den.

Att ändra rörelseriktning eller hastighet på en oljetanker till sjöss är inte okomplicerat. Båtens enorma rörelsemängd och motorernas begränsade effekt gör att alla förändringar tar lång tid. Är kraften begränsad måste vi alltså ta till en längre tid.

Om krafters verkan

Hittills har vi inte närmare fördjupat oss i hur krafter uppstår, utan bara tittat på konsekvenserna av krafters verkan. I själva verket är kraftbegreppet något som kräver mycket eftertanke.

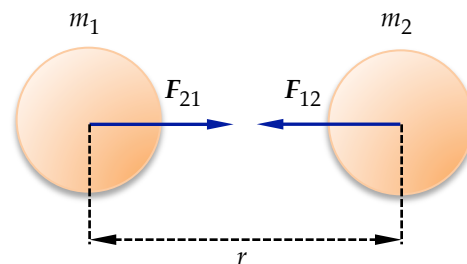
En kraft är alltid resultatet av någon typ av växelverkan. Föremål som är i kontakt med varandra växelverkar förstås, och påverkar därför varandra med krafter.

Gravitationslagen,

$$F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, \text{ och Coulombs lag,}$$

$$F_c = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2},$$

säger oss att föremål på avståndet r från varandra också växelverkar om de innehåller egenskaperna massa m respektive laddning q . Observera att båda lagarna innebär att kraften med vilken m_1 påverkar m_2 är lika stor som (och motsatt riktad) den kraft med vilken m_2 påverkar m_1 , dvs. $F_{21} = -F_{12}$ enligt figuren. Detta betyder att F_{21} orsakar en rörelsemängdsändring hos m_1 som är lika stor och motsatt riktad rörelsemängdsänd-

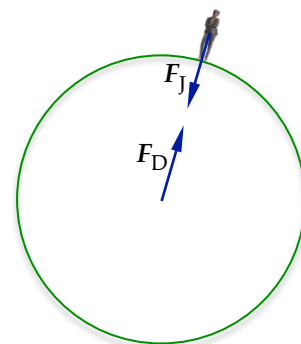


ringen hos m_2 (som ju orsakas av $-F_{12}$), $\frac{dp_1}{dt} = -\frac{dp_2}{dt}$. Om vi betraktar m_1 och m_2 som ett isolerat system som inte påverkas av några ytterligare krafter, kan vi därmed säga att summan av rörelsemängdsändringarna är noll. För systemet är alltså rörelsemängden konstant.

Rörelsemängdens bevarande är en av de mest visade (och användbara) naturlagarna. I alla system, från kolliderande biljardbollar till sönderfallande atomkärnor, använder vi oss av lagen om rörelsemängdens bevarande.

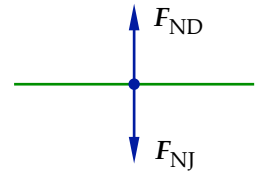
Detta betyder att vi, också för föremål som är i kontakt med varandra, kan beskriva kraftverkan i kontaktpunkten med hjälp av rörelsemängdens bevarande.

Ett enkelt exempel är du själv, stående på marken. Jorden



² Rörelsemängdsändringen dp kallas emellanåt också för impulsen, I .

påverkar dig med sin dragningskraft F_J och du påverkar Jorden med din F_D , och $F_J = -F_D$. Dessa båda krafter verkar i Jordens respektive din tyngdpunkt, se figuren. Men vi kan ju också tänka oss att vi studerar hur krafterna i kontaktpunkten mellan dig och jordytan ser ut. Den uppåtriktade kraften är kraften med vilken jordytan påverkar dig, den nedåtriktade, den kraft med vilken du påverkar jordytan.



Dessa krafter brukar kallas för kontaktkrafter, och är lika stora men motsatt riktade, $F_{ND} = -F_{NJ}$.³

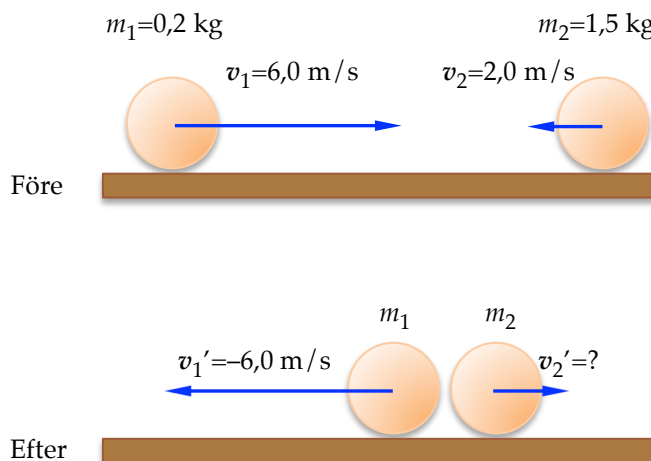
Ett annat, mera rörligt exempel är två kolliderande biljardbollar som inte påverkas av några yttre krafter. I kontaktpunkten är, i varje ögonblick, krafterna med vilka bollarna påverkar varandra, lika stora och motsatt riktade. Eftersom systemets (de båda bollarnas) rörelsemängd är bevarad, dvs.

$$\frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} = 0,$$

måste $F_1 + F_2 = 0$ dvs. $F_1 = -F_2$. Detta betyder *inte* att krafterna inte varierar, men de är *i varje ögonblick* lika stora.

EXEMPEL 8 – Kul-kollision I

Två kulor med massorna $m_1 = 0,2$ kg och $m_2 = 1,5$ kg rör sig med hastigheterna $v_1 = 6$ m/s och $v_2 = -2$ m/s rakt mot varandra. Efter kollisionen har den lättare kulan bytt rörelseriktning och rör sig med $v_1' = -6$ m/s. Vilken hastighet har den tyngre kulan efter kollisionen?



Om kulorna inte påverkas av några yttre krafter kommer kulornas totala rörelsemängd att vara konstant. Det betyder att

$$p_{\text{före}} = p_1 + p_2 = (0,2 \cdot 6 + 1,5 \cdot (-2)) \text{ kgm/s} = -1,8 \text{ kgm/s}.$$

Efter kollisionen är rörelsemängden

$$p_{\text{efter}} = p_1' + p_2' = 0,2 \cdot (-6) \text{ kgm/s} + p_2' = -1,2 \text{ kgm/s} + p_2'.$$

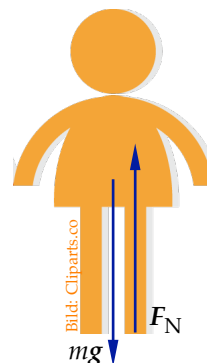
³ Uttrycket kallas ofta för Newtons tredje lag.

Eftersom $p_{\text{före}} = p_{\text{efter}}$ kan vi beräkna $p_2' = (-1,8+1,2) \text{ kgm/s} = -0,6 \text{ kgm/s}$. Ur detta får vi sedan $v_2' = (-0,6/1,5) \text{ m/s} = -0,4 \text{ m/s}$. Kulan byter alltså inte rörelseriktning men hastigheten blir (förstås) betydligt lägre.

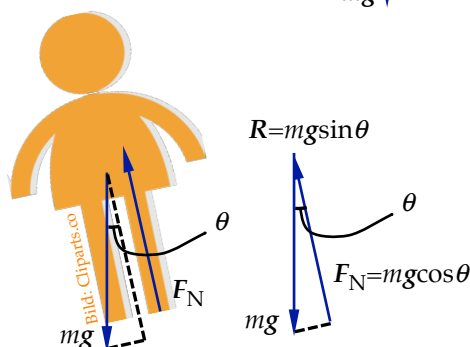
Normalkrafter

När vi närmare ska studera vilka krafter som verkar på ett föremål, och eventuellt orsakar en rörelse, är det viktigt att vi kan göra en s.k. *friläggning* av föremålet. Detta innebär att vi i en figur *endast* ritar föremålet i fråga och *de krafter som verkar på det*. De krafter med vilka föremålet påverkar omgivningen ska *inte* vara med, eftersom vi bara är intresserade av hur själva föremålets rörelse ser ut.

Tänk dig att du står, rakt upp och ner, på en helt plan isbana. Frilägger vi dig ser det ut som i figuren. Tyngdkraften och *normalkraften* är de enda krafter som påverkar dig. Båda är lika stora men motsatt riktade.



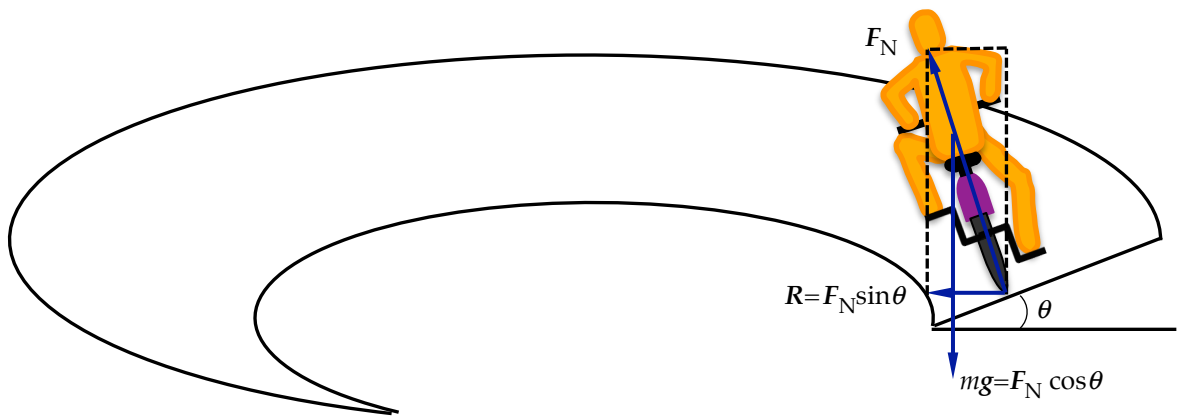
Om vi nu lutar isbanan något, kommer du att börja glida nerför banan. Vad är det som orsakar rörelsen? En friläggning ger svaret. Vi ser nu att tyngdkraft och normalkraft är olika stora och olika riktade. Eftersom normalkraften alltid är *vinkelrät mot underlaget* bestäms dess storlek av hur stor tyngdkraftens komponent vinkelrätt mot underlaget är. Om underlaget bildar vinkeln θ mot horisontalplanet, är tyngdkraftens komponent vinkelrätt mot underlaget lika med $mg\cos\theta$ se figuren.



Normalkraften $F_N = mg\cos\theta$ och komponenten är motsatt riktade och balanserar således varandra. Därmed återstår en kraft, den med underlaget parallella komponenten av tyngdkraften, $R = mg\sin\theta$. Denna kraft kommer alltså att orsaka en rörelse.

EXEMPEL 9 – Kurvtagning I

Vi vet nu att vi, om vi vill åstadkomma en riktningsändring på en rörelse, behöver en kraft vinkelrät mot rörelseriktningen. En cykel som ska klara en kurva måste således utsättas för en kraft som pekar in mot kurvans "centrum". I realiteten är, som vi senare ska se, s.k. friktionskrafter inblandade. Men låt oss nu till en början titta på hur man kan åstadkomma en "riktningsändrande kraft" utan att ta hjälp av friktionen. Hemligheten kallas dosering. Man bygger helt enkelt cykelbanan så att den lutar in mot kurvans centrum. När du kör in i en doserad kurva utbildas en normalkraft som, till skillnad från när du kör på ett horisontellt underlag, *inte* är motriktad tyngdkraften. Normalkraften är ju, som vi vet, alltid *vinkelrät mot underlaget*. Eftersom cykeln, medan du kör genom kurvan, inte kommer att röra sig i höjdlid, är summan av de lodräta krafterna lika med noll. Detta betyder att normalkraftens lodräta komponent är lika stor men motsatt riktad tyngdkraften, se figuren. Kvar, som enda resulterande kraft, blir normalkraftens horisontella komponent $F_N\sin\theta$. Denna kommer att *agera som centripetalkraft*, dvs. den kraft som ändrar rörelseriktningen. Vi kan alltså teckna



$$\left. \begin{aligned} F_N \cos \theta &= mg \\ F_N \sin \theta &= \frac{mv^2}{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

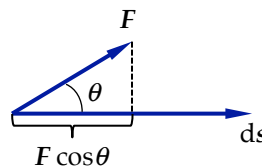
$$\Rightarrow v = \sqrt{gr \tan \theta} .$$

Vi ser att doseringsvinkeln θ blir avgörande för hur fort du kan köra genom en kurva med en given radie r . Observera att du utan friktion *måste* hålla just hastigheten v för att klara kurvan (med radien r) – varken mer eller mindre!

ARBETE, ENERGI OCH EFFEKT

Arbete

Vi har nu konstaterat att en nettokraft ($\neq 0$) som verkar på ett föremål orsakar en ändring av föremålets rörelse. Hastighetsvektorn ändrar antingen storlek eller riktning – eller både ock. Då en nettokraft F_x verkar på ett föremål medan föremålet rör sig den lilla sträckan dx i kraftens riktning, uträttas arbetet $dW = F_x dx$. Mer allmänt kan vi skriva detta som en skalärprodukt $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F \cos \theta \cdot ds$, se figuren. Det uträttade arbetet är alltså lika med skalärprodukten mellan kraften och förflyttningen. Av detta framgår tydligt att en kraft som verkar vinkelrätt mot förflyttningen ($\theta = 90^\circ$) i fysikalisk mening *inte* uträttar något arbete.



Om vi ska beräkna det totala arbete som uträttas vid en längre förflyttning, låt säga från punkten A till punkten B, får vi integrera enligt $W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$. SI-enheten för arbete blir 1 Nm, men oftast används enheten joule, 1 J = 1 Nm.

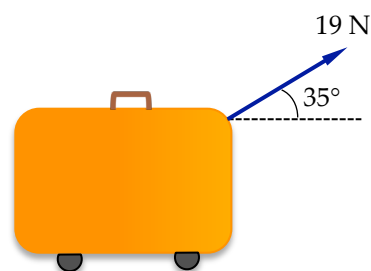
Effekt

I praktiska sammanhang är man ofta intresserad av hur stort arbete som uträttas *per tidsenhet*. Vi inför därför begreppet *effekt* som definieras som "arbete per tidsenhet",

$P = \frac{dW}{dt}$. Eftersom $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ kan effekten också skrivas som $P = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. SI-enheten för effekt blir 1 Nm/s = 1 J/s, men oftast används enheten watt, 1 W = 1 J/s.

EXEMPEL 10 – Arbete och effekt

När du drar din hjulförsedda resväska från terminal 3 till terminal 2 på Kastrup, använder du en konstant kraft med storleken 19 N. Kraften bildar 35° vinkel mot horisonten, se figuren, och avståndet mellan de båda terminalerna är 750 m. Hur stort arbete uträttar du på väskan?



Kraften är konstant och den komponent som uträttar arbete, dvs. är parallell med förflyttningen, blir då

$F_x = 19 \cdot \cos 35^\circ \text{ N} = 15,56 \text{ N}$. Arbetet blir alltså $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F \cdot s \cdot \cos \theta$ dvs.

$15,56 \cdot 750 \text{ Nm} = 1,167 \cdot 10^4 \text{ Nm}$. Arbetet som uträttas är alltså ca 12 kJ.

Promenaden mellan terminalerna tar 9 minuter. Hur stor effekt utvecklas med anledning av att du har resväskan att släpa på?

$P = \frac{W}{t} = \frac{1,167 \cdot 10^4 \text{ J}}{9 \cdot 60 \text{ s}} \approx 21,6 \text{ W}$. Du utvecklar alltså ca 22 W extra pga. resväskan.

Rörelseenergi

Vi har sett ovan hur en kraft som verkar i ett föremåls rörelseriktning uträttar ett arbete.

Eftersom en nettokraft verkande i rörelseriktningen leder till en acceleration, måste arbetet resultera i en ändring av föremålets hastighet. Vi kan beskriva detta enligt

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B m \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{s} = m \int_A^B \frac{d\mathbf{s}}{dt} d\mathbf{v} = \int_A^B m \cdot \mathbf{v} d\mathbf{v} = \frac{m\mathbf{v}_B^2}{2} - \frac{m\mathbf{v}_A^2}{2} \quad (m \text{ konstant})$$

De två sista termerna kallas för föremålets kinetiska energi, W_k , eller *rörelseenergi*. Arbetet som uträttas är alltså lika med skillnaden mellan föremålets kinetiska slutenergi och kinetiska begynnelseenergi. Notera att arbetet är helt oberoende av hur förflyttningen gått till. Arbetet som uträttas är bara en funktion av begynnelse- och sluttillstånden. SI-enheten för kinetisk energi blir förstås densamma som för arbete, dvs. 1 J (= 1 kgm²/s²).

EXEMPEL 11 – Rörelseenergi – en jämförelse

I exempel 7 studerade vi rörelsemängden hos en gevärskula, en tennisboll och en fallande kokosnöt. På alla de tre föremålen uträttades ett arbete som gjorde att de fick en kinetisk energi. Låt oss titta lite närmare på denna.

För gevärskulan gäller att

$$W_k = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow W_{k1} = \frac{0,015 \cdot 500^2}{2} \text{ J} = 1875 \text{ J}.$$

På samma sätt blir tennisbollens rörelseenergi, och kokosnötens $W_{k3} = 98 \text{ J}$. Notera att de kinetiska energierna skiljer på upp emot en faktor 20, trots att rörelsemängderna är av samma storleksordning. Rörelseenergin ger oss alltså ytterligare information om ett föremåls röresetillstånd.

EXEMPEL 12 – Kul-kollision II

Låt oss nu studera vilka *rörelseenergier* som var inblandade i exempel 8, exemplet med de kolliderande kulorna.

Före kollisionen var den totala rörelseenergin $W_{k1} + W_{k2}$ där

$$W_{k1} = \frac{0,2 \cdot 6^2}{2} \text{ J} = 3,6 \text{ J} \text{ och } W_{k2} = \frac{1,5 \cdot (-2)^2}{2} \text{ J} = 3 \text{ J}.$$

Den totala rörelseenergin är alltså 6,6 J. Notera att tecknet på hastigheten här helt mister sin betydelse. Efter kollisionen beräknas rörelseenergin till totalt 3,72 J. (Visa att det stämmer!)

Vi ser att en del rörelseenergi gått förlorad. Kollisionen har inte varit ideal (dvs. utan energiförluster), utan en del av energin har blivit till värme och deformation. Att rörelsemängden bevaras är en naturlag som gäller i alla sammanhang. Visserligen är energin också bevarad i alla reaktioner, men den kan spridas ut på olika former. Rörelseenergin behöver alltså inte bevaras vid en kollision. Skulle den, mot förmodan, göra det säger man att kollisionen är *fullständigt elastisk*.

Ett föremål med massan m som förflyttar sig med hastigheten v kan alltså tillskrivas en kinetisk energi $W_k = \frac{mv^2}{2}$.

Men rörelse innebär inte alltid förflyttning. Ett föremål kan ju rotera runt en axel eller vibrera kring ett jämviktsläge. Vi skiljer därför på *olika typer* av kinetisk energi – translations-, vibrations- och rotationskinetisk energi. I denna den första delkursen kommer vi bara att syssla med de två förstnämnda. Rotationsrörelsen sparar vi till delkurs två.

Potentiell energi

När vi spänner en pilbåge, trycker ihop en fjäder eller pumpar upp vatten i ett vattentorn utför vi ett arbete som vi senare kan få tillbaka genom att skjuta iväg en pil, fälla upp ett paraply eller ta en dusch.

Energi som lagras i ett system kallas för potentiell energi (vilket ju kan översättas med "möjlig energi"). Storleken på den potentiella energin kan beräknas med hjälp av det arbete som åtgår för att "ladda" systemet. Så som vi definierat arbete, motsvarar en uppladdning av ett system ett *negativt arbete* medan urladdningen motsvarar ett positivt. Tänk t.ex. på en fjäder. När fjädern spänns (dras ut eller trycks ihop) är fjäderkraften *motriktad* förflyttningen. Då fjädern återgår till sitt ursprungstillstånd verkar fjäderkraften förstås i samma riktning som förflyttningen.

Vi kan alltså med hjälp av arbete definiera potentiell energi i punkterna A och B på följande sätt:

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \equiv -\Delta W_p = -(W_p(B) - W_p(A))$$

Att det står ett minustecken i högerledet bör nu inte komma som en chock.

Eftersom vi bara kan beräkna en *ändring* av den potentiella energin, kan vi välja nollnivån godtyckligt. Det innebär i praktiken att vi sätter antingen $W_p(A)$ eller $W_p(B)$ lika med noll.

EXEMPEL 13 –Vattenfall

Victoriafallen i Zimbabwe är ett av världens största vattenfall. I medeltal strömmar 2 miljoner liter vatten per sekund nerför de 120 meter höga fallen. Vilken effekt skulle man kunna producera här, om låt säga hälften av den tillgängliga energin omvandlades till elektrisk energi?



Att lyfta något upp till höjden h (i gravitationsfältet) kräver ett arbete

$$\text{enligt } W = \int_0^h \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Eftersom gravitationskraften $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{g}$ är motriktad förflyttningen, blir arbetet negativt, dvs. vi "laddar" systemet. Om vi sätter $W_P \equiv 0$ vid foten av vattenfallet blir

$$W_P(h) = - \int_0^h \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^h mg \cdot ds = mgh$$

Detta betyder att den tillgängliga potentiella energin är mgh .

Två miljoner liter vatten har en massa på ca 2 miljoner kg, alltså $m = 2 \cdot 10^6$ kg. Den energi som är tillgänglig varje sekund är således $2 \cdot 10^6 \cdot 9,81 \cdot 120 \text{ J} = 2,3544 \cdot 10^9 \text{ J}$.

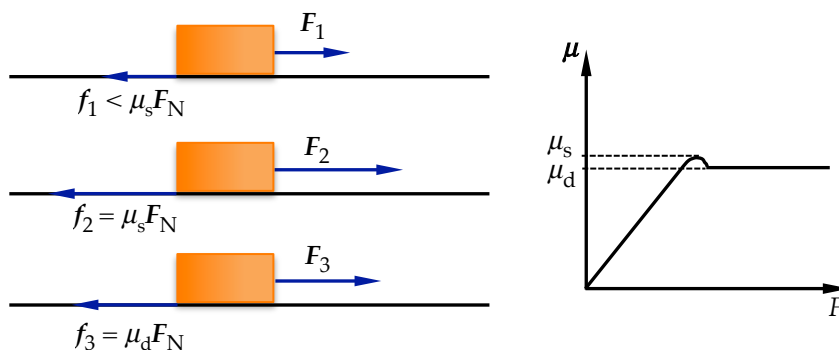
Om hälften av denna energi omvandlas till elektricitet kan man alltså få ut ca $1,2 \cdot 10^9 \text{ J}$ varje sekund dvs. effekten $1,2 \cdot 10^9 \text{ W}$.

I ett system utan energiförluster blir en ökning av den potentiella energin till en minskning av den kinetiska energin eller vice versa. Matematiskt kan vi uttrycka det som $W_{PB} - W_{PA} = -(W_{kB} - W_{kA})$, som efter omskrivning ger $(W_k + W_P)_B = (W_k + W_P)_A$. Detta betyder att summan av ett föremåls kinetiska och potentiella energier är lika stor i punkten A som i punkten B. Summan $W_k + W_P$ kallas ibland för föremålets *mekaniska energi*. Observera att den mekaniska energin är konstant *bara om energiförlusterna är noll*.

Friktion

I verkligheten går energi förlorad vid alla typer av energiomvandlingar. Det vanligaste är energiförluster i form av värme, och i många sammanhang är *friktionskrafter* inblandade.

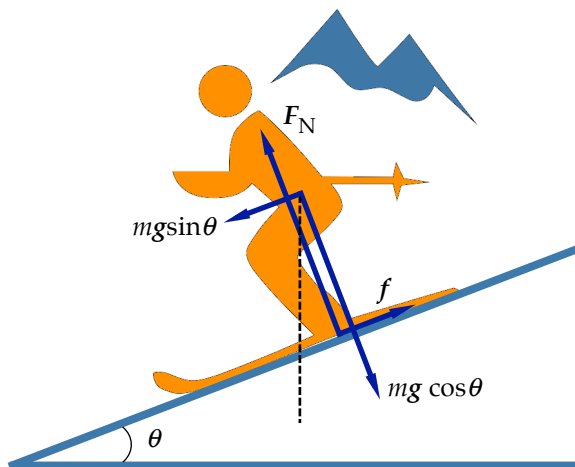
Så fort vi har ett föremål i kontakt med ett annat föremål, ett underlag, en vätska eller en gas, utbildas friktionskrafter. Dessa krafter ser olika ut beroende på vilken situation som föreligger. För ett föremål i vila mot ett underlag beskrivs friktionskraften f av den s.k. statiska friktionskoefficienten μ_s så att $f \leq \mu_s \cdot F_N$ där F_N är normalkraften med vilken underlaget verkar på föremålet.



Då friktionskraften når sitt största värde $f = \mu_s \cdot F_N$ kallas friktionen för "fullt utbildad", se den mellersta delen av figuren och diagrammet. Om föremålet glider i förhållande till underlaget beskrivs friktionskraften istället av den dynamiska friktionskoefficienten μ_d . Denna är för ett givet underlag i allmänhet mindre än μ_s , se diagrammet ovan.

EXEMPEL 14 – Skidåkning i backe

När du glider på skidor nedför en backe utbildas friktionskrafter som motverkar din rörelse. Situationen beskrivs, något förenklad, i figuren. (Notera att vi i figuren komponentuppdelat din tyngd i en komponent vinkelrät mot och en parallell med underlaget.) Den vinkelräta komponenten bestämmer storleken på normalkraften F_N och därmed också (tillsammans med μ_d) friktionskraftens storlek. Den komponent av din tyngd som är parallell med underlaget motverkas av friktionskraften. Om $mg \sin \theta > f$ blir $mg \sin \theta - f > 0$ och då accelererar du nerför backen. Det största värde som friktionskraften kan ha är $mg \sin \theta$. I detta läge är accelerationen förstås lika med noll.



EXEMPEL 15 – Kurvtagning II

Vi såg i exempel 9 hur en kurva kan doseras för att underlätta kurvtagning. Vi bortsåg då från att friktionskrafter verkar mellan fordon och underlag. I detta exempel ska vi ta hänsyn också till friktionen.

Figuren visar väsentligen samma situation som förut, endast friktionskraften har tillkommit. För att vi nu lättare ska reda ut problemet, komponentuppdelar vi alla krafter i lodräta och vågräta kraftkomponenter. Härefter summerar vi lodräta och vågräta krafter var för sig. Summan av de lodräta krafterna ska vara noll, medan summan av de vågräta utgör centripetalkraften. Friktionskraften f uttrycks med hjälp av friktionskoefficienten som för enkelhetens skull bara kallas μ , sådan att $f \leq \mu F_N$.

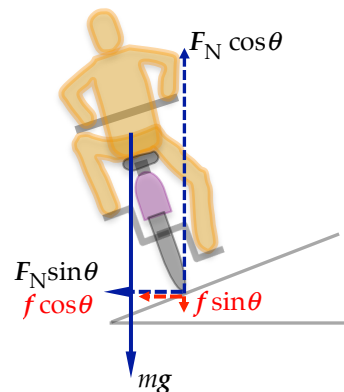
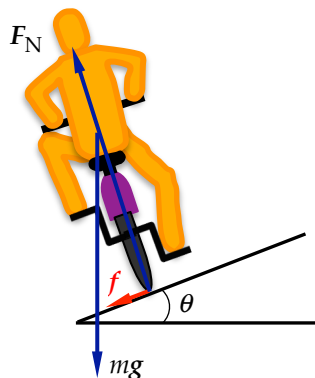
Lodräta krafter:

$$F_N \cos \theta - mg - f \sin \theta = 0$$

Vågräta krafter:

$$F_N \sin \theta + f \cos \theta = \frac{mv^2}{r}$$

Sätt in $f \leq \mu F_N$ i den översta ekvationen och lös ut F_N . Sätt sedan in detta uttryck för normalkraften i den nedre ekvationen och lös ut v . Uttrycket ger då ett värde på den maximala hastighet du kan hålla genom kurvan.



$$F_N \leq \frac{mg}{\cos \theta - \mu \sin \theta} \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{gr \cdot \frac{\sin \theta + \mu \cos \theta}{\cos \theta - \mu \sin \theta}}$$

Delar vi sedan täljare och nämnare med $\cos \theta$ så blir uttrycket enklare:

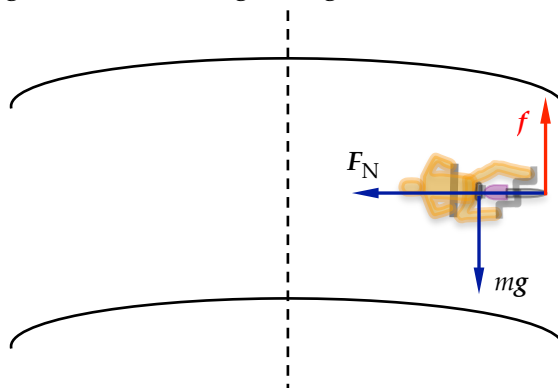
$$v_{\max} = \sqrt{gr \cdot \frac{\tan \theta + \mu}{1 - \mu \tan \theta}}$$

Sätter vi in $\mu = 0$ dvs. ingen friktion, får vi $v = \sqrt{gr \cdot \tan \theta}$ vilket är precis det resultat vi erhöi i exempel 9!

EXEMPEL 16 – Motorcykelcirkus

Förr var det stor underhållning när motorcykelcirkusen kom till staden. Det man visade upp var motorcyklister som körde runt på en bana med helt lodräta väggar. Det är tack vare friktionen som detta är möjligt och frågan är nu hur hög hastighet man måste ha för att hålla sig uppe i banan.

Tittar vi på figuren på nästa sida så ser vi att tyngden måste motverkas av friktionskraften. Friktionskraftens storlek är i sin tur beroende av hur stor normalkraften är. Normalkraften, som pekar in mot banans centrum, agerar centripetalkraft, och dess storlek bestäms således av hastigheten.



Vi har att $F_N = \frac{mv^2}{r}$ och $mg = f \leq \mu F_N$

Sätter vi ihop detta ser vi att $v_{\min} = \sqrt{\frac{gr}{\mu}}$.

Tricket är alltså fullt genomförbart om friktionen bara är tillräckligt stor!

UPPGIFTER

1. Vi har sett att medelhastigheten, under en rörelse med konstant acceleration, kan beräknas som medelvärdet av slut- och begynnelsehastigheterna enligt

$$v_{\text{medel}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v_0 + v_1}{2}$$

Vi vet också att sluthastigheten kan skrivas som

$$v_1 = v_0 + a \cdot \Delta t$$

Visa med hjälp av ovanstående att $v_1^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot \Delta x$. (Ett i många sammanhang väldigt användbart uttryck!)

2. I det absoluta slutstadiet av en månlandning närmar sig månlandaren månytan med den konstanta farten 3,0 m/s. På höjden 6,0 m ovanför marken slås motorerna av och månlandaren faller fritt. Med vilken hastighet slår månlandaren i ytan? Månen väger $7,35 \cdot 10^{22}$ kg och har radien 1738 km.

3. En gräshoppa kan ha en uppåtriktad acceleration som är 200 gånger större än tyngdaccelerationen. Antag att gräshoppan, när den hoppar rakt uppåt, accelererar likformigt under sträckan 0,6 cm. Försumma luftmotståndet.

a Hur högt når gräshoppan?

b Hur lång tid är gräshoppan i luften?

4. En fritt fallande kula rör sig under den sista sekunden av fallet 73,6 m. Antag att kulans begynnelsehastighet var noll och försumma luftmotståndet.

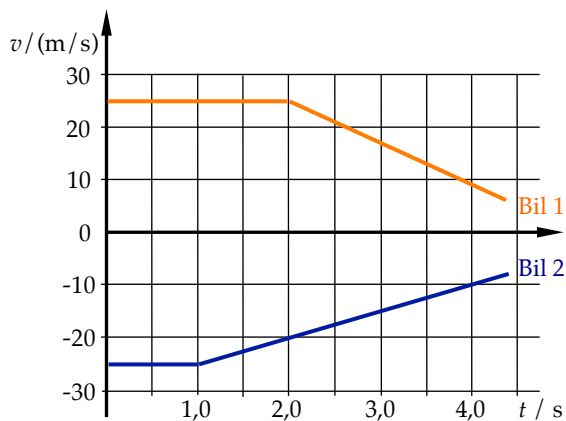
a Från vilken höjd föll kulan?

b Hur lång tid tog hela fallet?

5. Figuren visar ett v - t -diagram för två bilar som kör rakt mot varandra. Vid tiden $t = 0$ s befinner sig bilarna på 200 meters avstånd och förarna i respektive bil börjar bromsa så fort de upptäcker varandra.

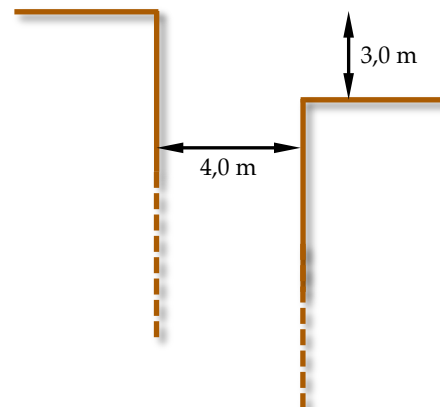
a Beräkna bilarnas retardation.

b Visa med beräkningar om, och i så fall när, bilarna kommer att kollidera. Retardationen förutsätts pågå tills bilarna står helt stilla.



6. I en filmscen jagas brottslingen av polisen över hustaken i en amerikansk storstad. Plötsligt måste de båda göra ett 4,0 m långt hopp över till ett hustak som dessutom är beläget 3,0 m lägre än det de kommer springande längs, se figur.

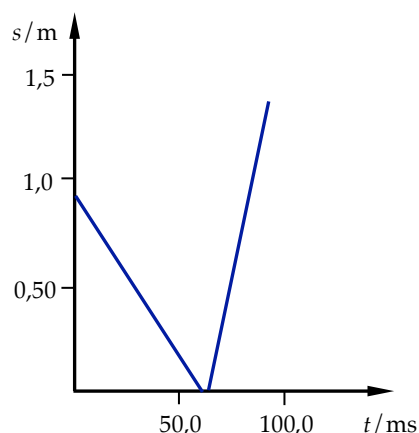
Vår brottsling har läst fysik och ser till att han i uthoppet har hastigheten 5,0 m/s riktad uppåt i 45° vinkel mot horisonten. Polisen anser att det bästa måste vara att springa rakt ut, alltså med den horisontella hastigheten 5,0 m/s. Klarar båda eller någon av dem hoppet?



7. **a** Med vilken vinkelhastighet rör sig minutvisaren på ett armbandsur?
b På mitt armbandsur är minutvisaren 8,0 mm lång, på Big Ben är den 4,3 m lång. Bestäm hastigheterna för respektive spets på de båda minutvisarna.

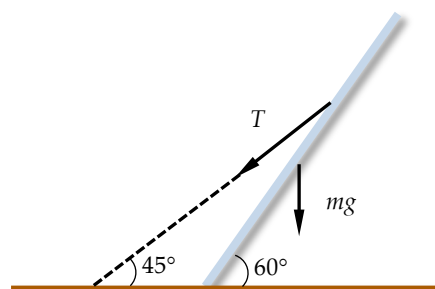
8. En boll är på väg in mot ett squashracket. Bollens avstånd till racket är i figuren avsatt som funktion av tiden. Bollen väger 24 g, och stöttiden uppskattas till 4 ms.

- a** Hur stor är bollens acceleration vid träffen?
b Hur stor impuls får bollen?
c Hur stor är medelkraften på bollen?



9. En 4-kilos fisk simmar västerut med hastigheten 1,5 m/s. Han är hungrig, så när han möter en 1,2-kilos fisk som kommer simmande mot honom med hastigheten 3,0 m/s, öppnar han gapet och sväljer den. Vilken hastighet har fisken direkt efter sin lunch? Försumma vattenmotståndet.

10. I figuren ser du en flaggstång som håller på att resas med hjälp av att man drar med kraften T i ett rep (masslöst) fäst 2,0 m från stångens topp. Flaggstången, som är homogen, har massan $m = 150$ kg och längden 10,0 m. Beräkna spännkraften T i det ögonblick som avbildats i figuren. Förutsätt



att vridningen sker kring punkten O.

11. Vid ett alfasönderfall sänder en moderkärna ut en alfapartikel (heliumkärna) och en dotterkärna bildas. Vid sönderfallet frigörs också energi. Det mesta av energin blir till rörelseenergi hos alfapartikeln. Dotterkärnan får, pga. sin betydligt större massa, endast en liten del av den frigjorda energin.

Beräkna, med hjälp av lagen om rörelsemängdens bevarande, hur stor del av den frigjorda energin som blir till rekylenergi hos dotterkärnan vid nedanstående sönderfall. Svara i procent. Massan för ^{226}Ra är 226 u, för ^{222}Rn 222 u och för ^4He 4 u. Förutsätt att moderkärnan är i vila innan sönderfallet.

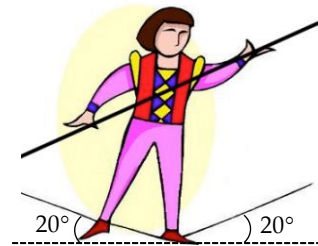
Sönderfallsformel: $^{226}\text{Ra} \rightarrow ^{222}\text{Rn} + ^4\text{He} + \text{energi}$

12. Andreas kastar ett rått ägg mot sin kompis Kalle. Kalle, som läst fysik, håller inte upp armen som skydd, utan fångar försiktigt ägget genom att låta handen följa med i rörelsen. Gör lämpliga antaganden och beräkna hur långt ifrån äggkastaren man kan vara för att avvärja äggröra. Ett ägg väger ca 50 g och kraften som krävs för att knäcka ett äggskal är ca 5 N.

13. En lindansare med massan 70 kg står stilla på en lina, såsom i figuren. Linan bildar 20° vinkel med horisontalplanet.

a Frilägg linan och beräkna spännkraften i linan i en punkt nära lindansarens fötter. Rita figur!

b Cirkusdirektören tycker att det skulle vara snyggare om linan var mera horisontell. Hur stor spännkraft fordras för att linan ska bli helt horisontell?



14. För att uppskatta accelerationen hos en Boeing 747 fäster du en kula med massan 0,020 kg i taket ovanför dig. När flygplanet accelererar på startbanan bildar (det masslösa) snöret som kulan hänger i vinkeln 12° med lodlinjen.

a Bestäm planets acceleration.

b Planet lyfter då hastigheten kommit upp i 310 km/h. Hur lång är startsträckan?

15. En fregattfågel cirklar runt i luften i en bana parallell med marken. Fågelns vinkel i cirkelbanan är 25° mot horisonten och det tar 13 s för fågeln att fullborda ett varv.

a Hur fort flyger fågeln?

b Vilken radie har cirkeln?

16. Ett föremål, t.ex. ett kassettfodral (med plastomslag), kan hållas så som figuren visar, dvs. utan att man i egentlig mening *lyfter* föremålet. Antag att tummen trycker med en horisontell kraft, riktad rakt åt vänster, och pekfingeret med en vertikal kraft, riktad rakt neråt.



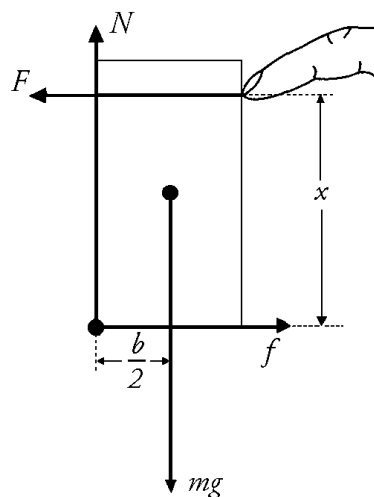
a Gör en friläggning av kassettfodralet och sätt ut samtliga krafter som verkar på det. (Förutsätt att massan är homogent fördelad.)

b Ställ upp ett jämviktsvillkor och visa att detta leder till att friktionskoefficienten (mellan finger och plastomslag) måste vara större än 1.

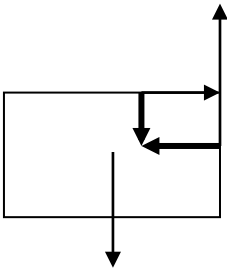
17. Ett sätt att bestämma friktionskoefficienten mellan t.ex. ett mjölkpaket och ett bord demonstreras i figuren. Om man petar högt uppe på paketet, kommer det att tippa. Petar man däremot längre ner på paketet, kommer det att glida på bordet. Figuren visar situationen just i gränsfallet.

a Ställ upp kraft- och momentjämvikterna och finn ett uttryck för friktionskoefficienten μ .

b Hur högt uppe på ett mjölkpaket med baskanten $b = 8,0$ cm kan du anbringa en horisontell kraft utan att paketet välter? Friktionskoefficienten mot underlaget är $\mu = 0,20$.



SVAR TILL UPPGIFTERNA

2. 5,3 m/s
3. **a** 1,2 m **b** 0,99 s
4. **a** 314 m **b** 8,0 s
5. **a** (-)7,8 m/s² och (-)5,0 m/s² **b** Bilarna kolliderar inte utan stannar på 20 meters avstånd från varandra.
6. Den fysikkunnige skurken hoppar 4,3 m i x-led innan han landar. Polisen har bara hunnit 3,9 m i x-led när han passerar kanten...
7. **a** $1,75 \cdot 10^{-3}$ rad/s **b** 14 $\mu\text{m/s}$ och 7,5 mm/s.
8. **a** $2,1 \cdot 10^4 \text{ m/s}^2$ **b** 2,0 kgm/s **c** 510 N
9. 0,46 m/s
10. 1,8 kN
11. 1,8 %
13. **a** 1,0 kN **b** Linan kan inte bli helt horisontell. För det fordras en oändligt stor kraft.
14. **a** 2,1 m/s² **b** 1,8 km
15. **a** 9,5 m/s **b** 20 m
16. **a**

17. **a** $\mu = b/2x$ **b** 20 cm