Laboration 1: Gravitation

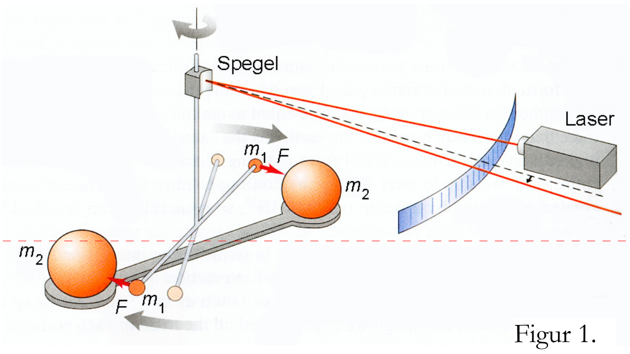
Inledning

Försöket avser att påvisa gravitationskraften och att bestämma ett ungefärligt värde på gravitationskonstanten G i Newtons gravitationslag,

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Lagen beskriver gravitationskrafterna mellan två massor m_1 och m_2 vars masscentra befinner sig på avståndet r från varandra. Till vår hjälp har vi en torsionsvåg av Cavendishtyp[1] som beskrivs nedan.

Vi vet på förhand att de krafter som verkar mellan två kroppar i ”laboratorie-storlek” är små. Mätningen kommer därför att kräva en mycket känslig metod. I torsionsvågen, Figur 1, skapar gravitationskrafterna mellan massorna m_1 och m_2 en vridning av en tunn tråd. En spegel som är monterad på tråden belyses med en laser och avlänkningen av ljusstrålen registreras på en skärm några meter bort.



Figur 1.

Försöksutrustning

I vår uppställning är tråden en bronstråd med dimensionerna 150 µm × 10 µm. I änden av tråden finns en T-formad vågarm i vilken två små blykulor med vardera massan m_1 = 0,015 kg är fastsatta. Tråden är, liksom vågarmen med blykulorna, innesluten i en lufttät behållare för att förhindra störningar från luftströmmar. Nedanför vågarmen, utanför den lufttäta behållaren, finns en vridbar hållare på vilken två blykulor med massan m_2 = 1,5 kg kan placeras.

[1] Namnet har vågen efter Sir Henry Cavendish som 1798 var den förste att mäta gravitations-konstanten med hjälp av en torsionsvåg.

Comment [EN1]: Du har valt att skriva lite teori i inledningen också. Det är ok, men hänvisa gärna till kursboken!

Comment [EN2]: Har du ritat figuren själv? Om inte måste det finna en referens! Skriv också en figurtext! Jag tycker inte att figuren är riktigt bra. Varför är bara krafterna på de små massorna utritade?

Utförande

Förberedelser

Innan vi startar mätningen måste apparaturen justeras in. Vi börjar med att se till att torsionstrådens nedre ände ligger mitt i ”våghuset”. På så sätt är vi säkra på att jämviktsläget sitter symmetriskt i våghuset och att tråden inte stöter emot väggarna. För att jämviktsläget J_0 ska överensstämma med mittläget låter vi först kulorna svänga så häftigt att de slår emot våghuset. Vändlägena a_1 och a_2 avläses och mittläget M beräknas enligt

$$M = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

När kulornas svängning dämpats bestäms jämviktsläget genom avläsning av tre konsekutiva vändlägen b_1, b_2 och b_3. Jämviktsläget J_0 beräknas sedan genom

$$J_0 = \frac{\frac{b_1 + b_3}{2} + b_2}{2}$$

och torsionshuvudet vrids tills M och J_0 överensstämmer.

Skalan placeras på några meters avstånd från spegeln och så att jämviktsläget hamnar ungefär mitt på skalan. Skalans mittpunktsnormal justeras också så att den går genom spegeln.

Mätningar

I laborationshandledningen härleds, med utgångspunkt från momentjämvikt följande uttryck för gravitationskonstanten G:

$$G = \frac{(a-s)^2}{(1-\beta)\cdot m_1 \cdot m_2 \cdot d} \cdot 2\pi^2 \cdot \frac{I}{T^2} \cdot \alpha \text{ där } \beta = \frac{a(a-s)^2}{\left(4d^2 + a^2\right)^{3/2}}.$$

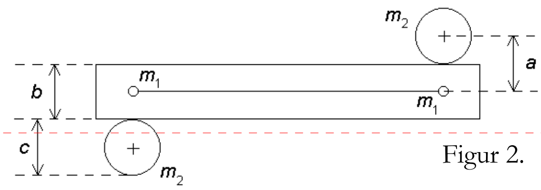
I är tröghetsmomentet för vågarmen (inklusive de små blykulorna) med avseende på en vinkelrät axel genom armens mittpunkt, T är svängningens periodtid och α utslagsvinkeln. Det totala tröghetsmomentet för vågarm och kulor härleds till

$$I = 2m_1 d^2 + \frac{4}{5} m_1 r_1^2 = m_1 (2d^2 + \frac{4}{5} r_1^2)$$

där r_1 är de små kulornas (m_1:s) radie.

Ur figur 2 framgår att a kan beräknas som

$$a = \frac{b + c}{2}.$$



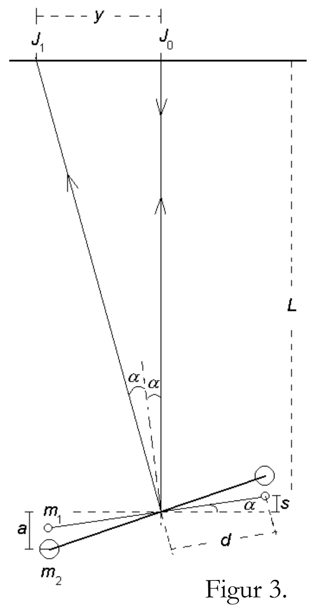
Figur 2.

Comment [EN3]: Även här saknas figurtext.

Vi mäter b och c med skjutmått och beräknar därefter a till

$$a = \frac{28{,}2 + 63{,}9}{2}\ \text{mm} = 46{,}05\ \text{mm}\,.$$

Sträckorna s och d framgår av Figur 3. d kan mätas direkt medan s bestäms med hjälp av α.

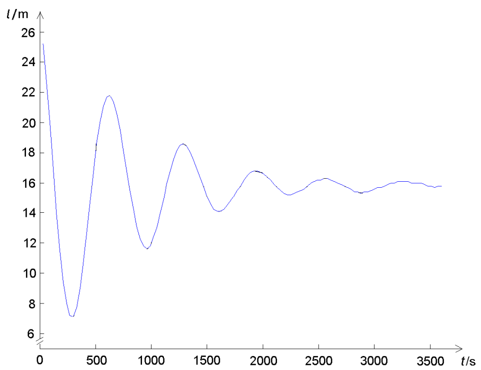


Figur 3.

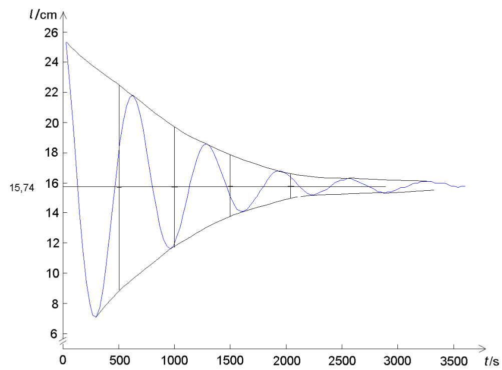
Det som nu återstår att bestämma är periodtiden T och utslagsvinkeln α. Utslagsvinkeln kommer också att ge oss värdet på s. Vi placerar de stora kulorna på den vridbara armen och ser till att kulorna berör våghusets väggar. När svängningarna stabiliserats avläser vi, på samma sätt som tidigare, tre konsekutiva vändlägen och jämviktsläget J_1 beräknas. Härefter vrider vi *försiktigt* armen så att kulorna berör våghusets väggar från ”andra hållet”. Här vidtar en dryg timmes avläsningar. Ljusstrålens läge avläses på skalan var 30:e sekund och värdena plottas sedan i ett diagram som funktion av tiden, se Figur 4.

Comment [EN4]: ...som saknar figurtext. som alla figurer

Comment [EN5]: Här saknar jag en tabell med dina mätdata.



Figur 4.



Figur 5.

Comment [EN6]: Figur 4 och 5 är snygga och fint inklippta men kanske aningen för små för att vara åskådliga.

För att med hjälp av grafen bestämma den nya jämviktsläget, J_2, ritar vi in dämpningskurvan i diagrammet. Därefter drar vi några linjer parallella med y-axeln och bestämmer mittpunkterna på dessa linjer, se Figur 5. Med hjälp av mittpunkterna kan sedan jämviktsläget J_2 bestämmas.

Vi har kallat avståndet mellan mittläget J_0 och första jämviktsläget J_1 för y. Det betyder nu att avståndet mellan de båda jämviktslägena J_1 och J_2 måste vara lika med $2y$. Ur Figur 3 framgår att

$$\alpha = \frac{y}{2L} = \frac{s}{d}$$

varvid vi kan bestämma α och s.

Periodtiden T kan avläsas direkt ur Figur 5. Vi avläser skärningspunkter mellan svängningskurvan och jämviktsläget så att vi får tre periodtider och beräknar sedan medelvärdet.

Resultat och beräkningar

Givet från början är:

m_1 = 0,015 kg
m_2 = 1,50 kg
r_1 = 7,5 mm
d = 49,5 mm

L mättes till 3,21 m och a beräknades ovan till 46,05 mm.

Comment [EN7]: Alla storheter ska vara kursiva.

Vi inleder med att bestämma y för att härur kunna beräkna α.

$$y = \frac{J_1 - J_2}{2} = \frac{28,4 - 15,7}{2}\ \text{cm} = 6,35\ \text{cm}.$$

$$\alpha = \frac{y}{2L} = \frac{0,0635}{2 \cdot 3,21} = 0,00989$$ vilket i sin tur ger att

$$s = \alpha \cdot d = 0,00989 \cdot 4,95\ \text{cm} = 0,0490\ \text{cm}$$

Tre periodtider avläses i diagrammet och medelvärdet av dessa tre beräknas till T = 666 s.

Vårt slututtryck för gravitationskonstanten G blir nu

$$G = \frac{(a-s)^2}{(1-\beta)\cdot m_2 \cdot d} \cdot 2\pi^2 \cdot \frac{\left(2d^2 + \frac{4}{5}r_1^2\right)}{T^2} \cdot \alpha \quad \text{där} \quad \beta = \frac{a(a-s)^2}{\left(4d^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

och vi inleder med att bestämma β till 0,0734 och får sedan slutligen gravitationskonstanten G till

$$G = 6,57 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/(\text{kg})^2$$

Felberäkning

För att underlätta felberäkningen något förenklar vi uttrycket för G genom att försumma några termer. β försummas i förhållande till 1, s försummas i förhållande till a och r_1 i förhållande till d. Då blir

$$G \approx \frac{a^2}{m_2} \cdot 2\pi^2 \cdot \frac{2d}{T^2} \cdot \alpha = \frac{a^2}{m_2} \cdot 2\pi^2 \cdot \frac{d}{T^2} \cdot \frac{y}{L}$$

Det sannolika felet i G ges av

Comment [EN8]: Du väljer att göra en hel felberäkning. Det är bra. Det viktigaste är dock att felen i varje mätning är uppskattade...

$$(\delta G)^2 \approx \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial G}{\partial x_k} \right)^2 (\delta x_k)^2$$

där x_k är storheterna i uttrycket för G och δx_k felet i respektive storhet. Det betyder att det sannolika felet kan skrivas som

$$(\delta G)^2 \approx \left(\frac{2G}{a} \right)^2 (\delta a)^2 + \left(-\frac{G}{m_2} \right)^2 (\delta m_2)^2 + \left(\frac{G}{d} \right)^2 (\delta d)^2 + \left(-\frac{2G}{T} \right)^2 (\delta T)^2 + \left(\frac{G}{y} \right)^2 (\delta y)^2 + \left(-\frac{G}{L} \right)^2 (\delta L)^2$$

Vi gör en uppskattning av hur stora fel mätningarna är behäftade med och kommer fram till följande:

δa = 0,2 mm, δm_2 = 0,005 kg, δd = 0,2 mm, δT = 5 s, δy = 2 mm och δL = 10 mm.

Detta ger oss ett fel $\delta G < 3 \cdot 10^{-12}$ Nm²/(kg)², dvs.

$$\boxed{G = (6{,}57 \cdot 10^{-11} \pm 0{,}3 \cdot 10^{-11}) \ \mathrm{Nm}^2/(\mathrm{kg})^2}$$

Diskussion

När vi jämför detta med tabellvärdet $6{,}6726 \cdot 10^{-11}$ Nm²/(kg)² ser vi att våra mätningar väl överensstämmer med tidigare uppmätta värden. Metoden att mäta G med hjälp av en torsionsvåg av Cavendishmodell kan därför anses tämligen tillförlitlig.

Comment [EN9]: Diskussionsdelen av din rapport är mer lik en sammanfattning! Rapporten saknar också referenser. Har du inte använt några?

Labhandledarens kommentar till rapporten som helhet.

Denna rapport är snygg och det märks att du lagt ner mycket jobb på att skriva den! Ibland skriver du i aktiv form, ibland i passiv. Det är inte konsekvent, så välj gärna innan du börjar skriva. Aktiv form är oftast bekvämare att läsa medan den passiva formen kan kännas mer ”strikt”.

Du har gjort en riktig felberäkning även om detta var lite ”överkurs” – bra! Det är dock några saker som du behöver komplettera med för att jag ska godkänna rapporten.

- Skriv en mer utförlig diskussion! Denna del är viktig och till för att du genom att knyta ihop teori och experiment visar vad du lärt dig under laborationen. I just denna laboration är ju huvudsyftet inte att bestämma konstanten G – det har många gjort innan dig! Däremot är tekniken, metoden, precisionen etc. värda att behandla i en diskussion.
- Jag tror att du använt litteratur när du skrivit din rapport. Ange därför referenser sist i rapporten. Ge också källhänvisning till figur 1.
- Glöm inte bort att skriva figurtexter.
- Bifoga dina mätdata! De behöver inte skrivas in i rapporten utan kan bifogas som en bilaga.
- Läs igenom mina övriga kommentarer och rätta.

/EN